Costo de factores de producción

El costo por una unidad de cada factor será dado por

Trabajo ℓ → costo w (salario o wage)

Capital K → costo r (costo de capital)

* Ejemplo: costo por hora de alquiler de maquinaria

Problema de Minimización de Costos

$$\min_{\ell, K} \; w\ell + rK \quad \text{s.a} \quad f(K,\ell) = q_0$$

Idéntico al problema de demanda de Hicks

$$\mathcal{L} = w\ell + rK - \lambda\,[\,f(\ell,K) - q_0\,]$$

C.P.O :

$[\ell]$ $\quad w - \lambda\, Pmg_\ell = 0$

$[K]$ $\quad r - \lambda\, Pmg_K = 0$

$[\lambda]$ $\quad f(\ell,K) - q_0 = 0$

precio relativo $\quad$ TMST

$$\frac{w}{r} = \frac{Pmg_\ell}{Pmg_K} \quad (1)$$

$$f(\ell,K) = q_0 \quad (2)$$

De nuevo, ¿por qué (1) debe cumplirse en equilibrio?

- Si $\dfrac{w}{r} < \dfrac{Pmg_\ell}{Pmg_K}$ ⇒ la productividad de ℓ comparado a K es mayor que el precio relativo de ℓ con respecto a K (conviene tener más ℓ)

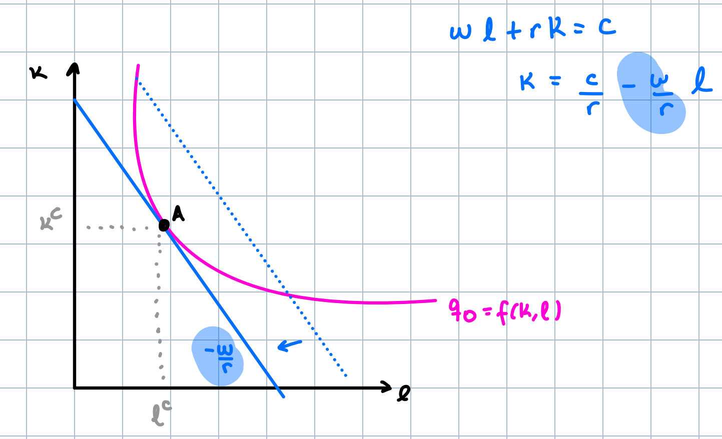
- Si $\dfrac{w}{r} > \dfrac{Pmg_\ell}{Pmg_K}$ ⇒ la productividad de ℓ comparado a K es menor que el precio relativo de ℓ con respecto a K (conviene tener menos ℓ)

La solución al problema se conoce como las demandas condicionadas de factores :

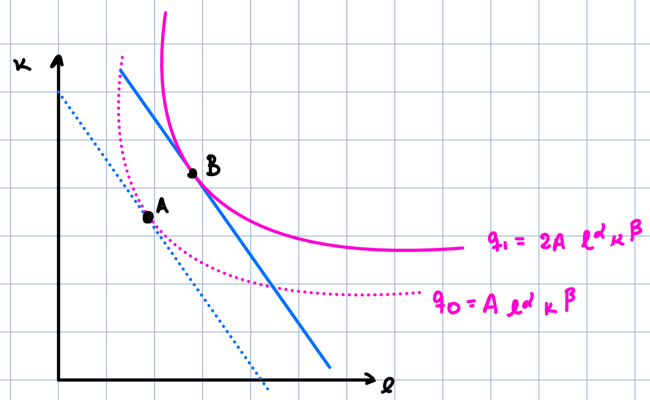
$$\ell^c(w,r,q) \quad , \quad K^c(w,r,q)$$

↳ depende del "q" que quiero producir.

Gráficamente:



¿Qué pasa si la empresa se vuelve más productiva? Por ejemplo pasa de $A\, l^{\alpha} k^{\beta}$ a $2A\, l^{\alpha} k^{\beta}$



* ¡Aumenta la demanda de factores! En algunos casos puede que la demanda de un factor disminuya y se le llama un factor inferior (ejemplo: mano de obra no calificada)

Funciones de costos → Costo por unidad q, ya no por cada insumo

Def.- (Costo Total) $C(w,r,q) = w\, l^c(w,r,q) + r\, k^c(w,r,q)$

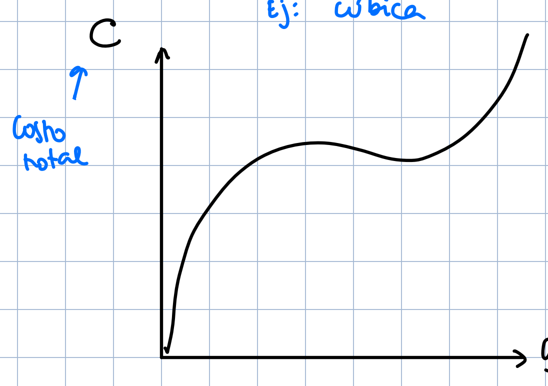
Es el costo con las demandas de factor condicionada (que dependen de $w, r, y\ q$)

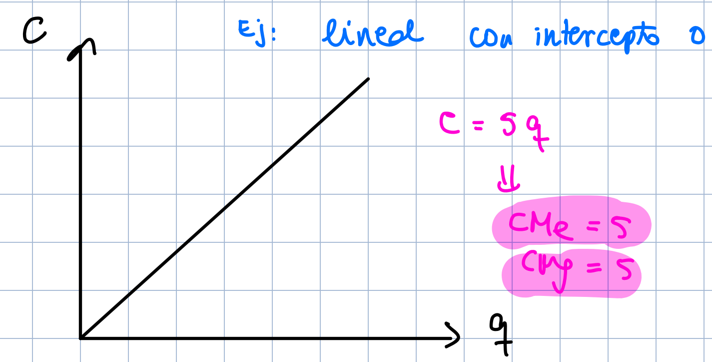
Def.- (Costo Medio) $CMe(w,r,q) = \frac{C(w,r,q)}{q}$

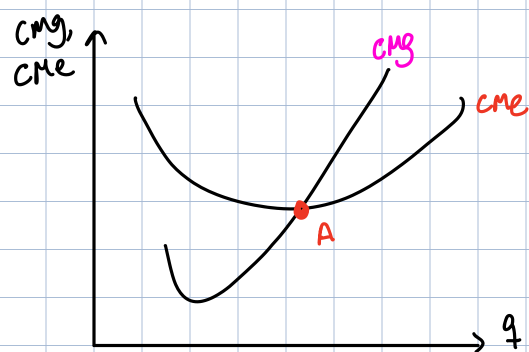
Def.- (Costo marginal) $Cmg(w,r,q) = \frac{\partial C(w,r,q)}{\partial q}$

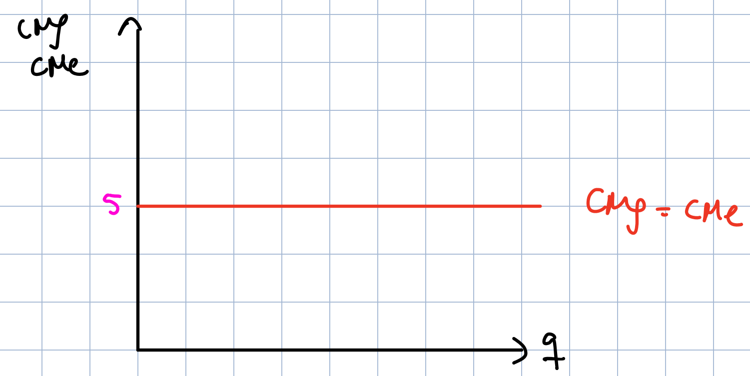
(*) Noten que $C(q)$ depende de ℓ^c y κ^c que dependen de la función de producción que usemos. Así que nuestra elección de que $f(\kappa,\ell)$ usar tendrá repercusión en como se verá esta función de costos.

$$f(\ell,\kappa) \xrightarrow{\text{determina}} \begin{matrix}\ell^c(w,r,q)\\ \kappa^c(w,r,q)\end{matrix} \xrightarrow{\text{determina}} \begin{matrix}C(w,r,q)\\ CMe,\ CMg\end{matrix} \xrightarrow{\text{determina}} \text{Curva de oferta}$$









El (costo marginal) CMg = CMe (costo medio) cuando CMe está en su mínimo.

$$\frac{\partial CMe}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{C}{q}\right] = \frac{\partial C}{\partial q}\frac{1}{q} - \frac{C}{q^2}$$

$$= \frac{1}{q}\left[\frac{\partial C}{\partial q} - \frac{C}{q}\right]$$

$$= \frac{1}{q}\left[CMg - CMe\right] = 0$$

Relación entre retornos a escala y f. de costos

⇒ Si la f. de producción $f(\ell,\kappa)$ tiene retornos a escala

- crecientes
- constantes
- decreciente

⇒ costo medio (CMe)

- decreciente
- constante
- creciente

Corto plazo

Largo plazo: $q = f(\ell, K) \rightarrow C = w\ell + rK$
(K es flexible) $\hookrightarrow \ell^c, K^c$

Corto plazo: $q = f(\ell, \bar{K}) \rightarrow C^{CP} = w\ell + r\bar{K}$
(K es fijo) $\hookrightarrow \ell^c$

Y, en el corto plazo aparece una distinción

$$C^{CP} = \underbrace{w\ \ell}_{\substack{\text{Costo variable} \\ CV}} + \underbrace{r\ \bar{K}}_{\substack{\text{Costo Fijo} \\ CF}}$$

1) Ejemplo 1: $q = \ell^{0.2} K^{0.2}$, $w = 1$, $r = 1$

- Rendim.: $f(\alpha\ell, \alpha K) = (\alpha \ell)^{0.2} (\alpha K)^{0.2} = \alpha^{0.4} \ell^{0.2} K^{0.2}$
  exponente $< 1 \Rightarrow$ rend. decrecientes.

- Factores:

$$\frac{K}{\ell} = 1 \quad (1)$$

$$K^{0.2} \ell^{0.2} = q \quad (2)$$

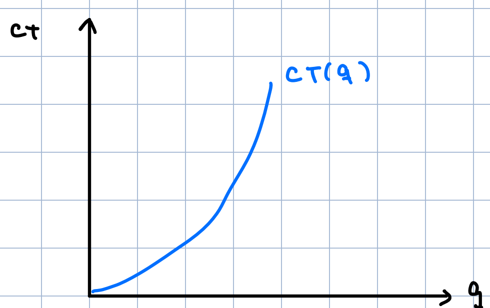
De (1) tenemos $\ell = K$ y reemplazo en (2):

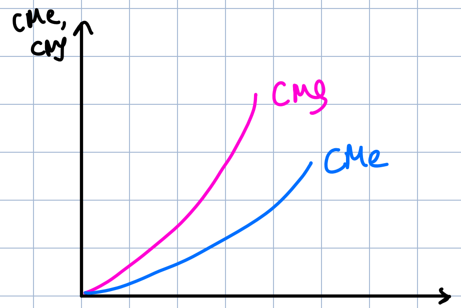
$$K^{0.2} K^{0.2} = q \Rightarrow K^c = q^{10/4}$$
$$\Rightarrow \ell^c = q^{10/4}$$

- Costos: $CT = \underbrace{1}_{w} \times q^{10/4} + \underbrace{1}_{r} \times q^{10/4} = 2q^{10/4} = 2q^{5/2}$

$$CMe = 2q^{6/4} = 2q^{3/2}$$

$$CMg = 10/4 \times 2 \times q^{6/4} = 5q^{3/2}$$





retornos decrecientes $\Rightarrow$ costos crecientes

2) **Ejemplo 2:** $q = K^{0.5} \ell^{0.5}$, $w = 1$, $r = 1$

- Rendim: constantes (verifiquen)

- Factores: $\longrightarrow$ $TMST = \frac{w}{r}$

$$\frac{K}{\ell} = 1 \quad (1)$$

$$K^{0.5} \ell^{0.5} = q \quad (2)$$

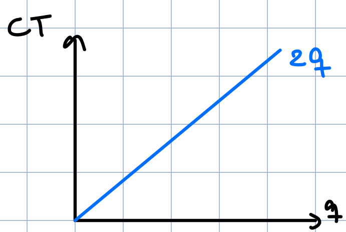
$\Rightarrow$ $K = \ell$ y reemplazo en (2)

$$K^{0.5} K^{0.5} = q \Rightarrow \begin{matrix} K^c = q \\ \ell^c = q \end{matrix}$$

- Costos: $CT = \underbrace{1}_{w} \times \ell^c + \underbrace{1}_{r} \times K^c = 2q$

$$CMe = 2$$

$$CMg = 2$$



rend. constantes $\Rightarrow$ costos constantes (CMe, CMg)

3) **Ejemplo 3:** $q = K\ell$

- Rend: crecientes (verifiquen)

- Factores: $\frac{K}{\ell} = 1 \quad (1)$

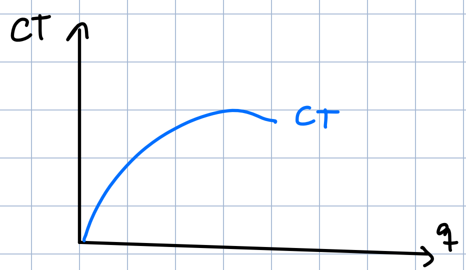
$$K\ell = q \quad (2)$$

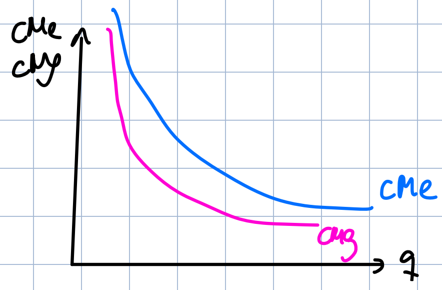
Obtenemos: $K^c = q^{1/2}$
$\ell^c = q^{1/2}$

- Costos: $CT = 1 \times q^{1/2} + 1 \times q^{1/2} = 2q^{1/2}$

$$CMe = 2/\sqrt{q}$$

$$CMg = 1/\sqrt{q}$$





rend. Crecientes ⇒ costos (CMe, CMg) decrecientes

⊛ ¿Qué cambia en el corto plazo?

$q = \ell^{0.5} K^{0.5}$ y $\bar{K} = 25$

⇒ NO HACE FALTA DERIVAR NADA

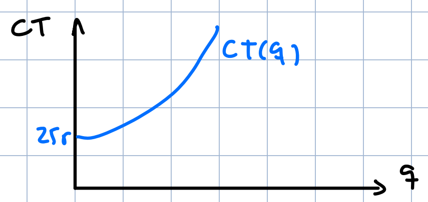
$$q = \ell^{0.5}\sqrt{25}$$

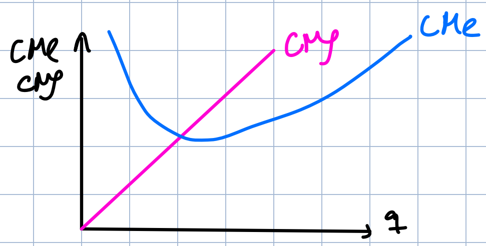
$$\ell^c = (q/5)^2 = \frac{q^2}{25}$$

$$CT = w\frac{q^2}{25} + r\,25$$

$$CMe = \frac{25\,r}{q} + w\frac{q}{25}$$

$$CMg = 2\frac{w}{25}q$$





Unas últimas definiciones

Def: (Elasticidad Producto)

$$\varepsilon_{q,\ell} = \frac{\Delta\%\, q}{\Delta\%\, \ell} = \frac{d\log(q)}{d\log(\ell)}$$

$$\varepsilon_{q,K} = \frac{\Delta\%\, q}{\Delta\%\, K} = \frac{d\log(q)}{d\log(K)}$$

Ejemplo: $q = K^{0.5}\ell^{0.5} \Rightarrow \varepsilon_{q,\ell} = 0.5$, $\varepsilon_{q,K} = 0.5$

$\Rightarrow \log q = 0.5\log K + 0.5\log \ell$

⊛ Retornos crecientes $\varepsilon_{q,\ell} + \varepsilon_{qK} > 1$
constantes $\varepsilon_{q,\ell} + \varepsilon_{qK} = 1$
decrecientes $\varepsilon_{q,\ell} + \varepsilon_{qK} < 1$

Lema de Shepard

- $$\frac{\partial C(w,r,q)}{\partial w} = \ell^c(w,r,q)$$
- $$\frac{\partial C(w,r,q)}{\partial r} = K^c(w,r,q)$$

Ejemplo anterior:

$$CT = w\frac{q^2}{25} + r\,25 \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial w} = \frac{q^2}{25}$$

$$\Rightarrow \ell^c = \frac{q^2}{25}.$$

Elasticidad de sustitución

$$\sigma = \frac{\Delta\% \ (K/\ell)}{\Delta\% \ |TMST|} = \frac{\partial \log(K/\ell)}{\partial \log(Pmg_\ell/Pmg_K)}$$

$$\underset{\text{en equilibrio}}{=} \frac{\partial \log(K/\ell)}{\partial \log(w/r)} \qquad \left(TMST = \frac{w}{r} \right)$$

⊛ Este es uno de los números más importantes en toda la economía laboral.

Es importante por lo siguiente: (Lo derivará con Sintia)

$$\underbrace{\frac{\partial \ell^c}{\partial w}}_{\text{¿cuánto cambia la demanda condicional de trabajo si aumenta } w\text{?}} = \underbrace{\sigma}_{\text{Elasticidad de sust}} \cdot \underbrace{S_\ell}_{\text{proporción de costo que corresponde a } \ell.}$$