En esta segunda mitad del curso estudiaremos cómo las firmas deciden cuánto producir y cómo hacerlo.

Supuestos:
1) Firmas producen un bien único.
2) Las unidades producidas son homogéneas.
3) Los insumos/factores de producción son homogéneos.

Def: (Función de Producción) Muestra la cantidad q que se puede producir de un bien, utilizando diferentes combinaciones de insumos o factores de producción.

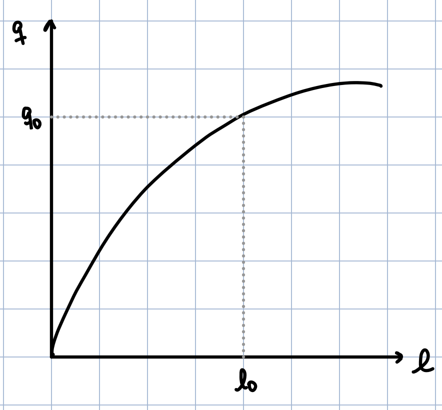
Matemáticamente

$$q = f(\underbrace{l}_{\substack{\text{trabajo} \\ \text{(labor)}}}, \underbrace{k}_{\text{capital}})$$

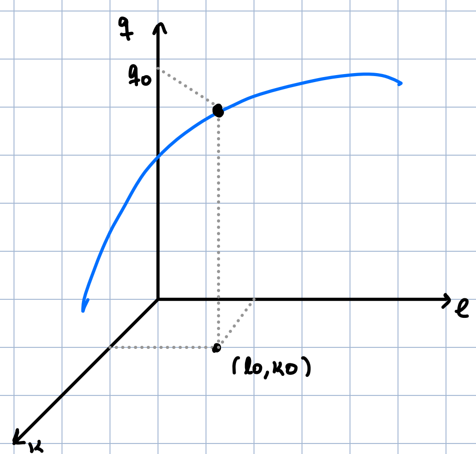
* Podríamos incluir más factores, pero nos quedaremos con estos por el momento.

Noten que la función $f(\cdot,\cdot)$ resume la tecnología de producción. A diferencia de la función de utilidad, el valor de q sí tiene un significado cardinal y no solo ordinal. Es decir, si aplicamos una transformación monótonamente creciente a $f(\cdot,\cdot)$, entonces representará una tecnología de producción de otra firma.

1 factor de producción: l



2 factores: l, k



Para representar la producción usaremos un truco similar a las curvas de indiferencia, y las llamaremos isocuantas.

Def.- (Producto Medio) Es el nivel de producción por cada unidad de un insumo.

$$PMe_{\ell} = \frac{q}{\ell} = \frac{f(K,\ell)}{\ell} \quad , \quad PMe_K = \frac{q}{K} = \frac{f(K,\ell)}{K}$$

Def.- (Producto Marginal) Es el incremento de unidades producidas si aumenta un insumo en 1 unidad.

$$\underbrace{PMg_{\ell}}_{\text{También se usa } f_{\ell}} = \frac{\partial f(\ell, K)}{\partial \ell} \quad , \quad \underbrace{PMg_{K}}_{\text{También se usa } f_K} = \frac{\partial f(\ell, K)}{\partial K}$$

Supuestos habituales:

1) $PMg_j > 0 \quad , \quad j = K, \ell.$ Producción creciente en factores

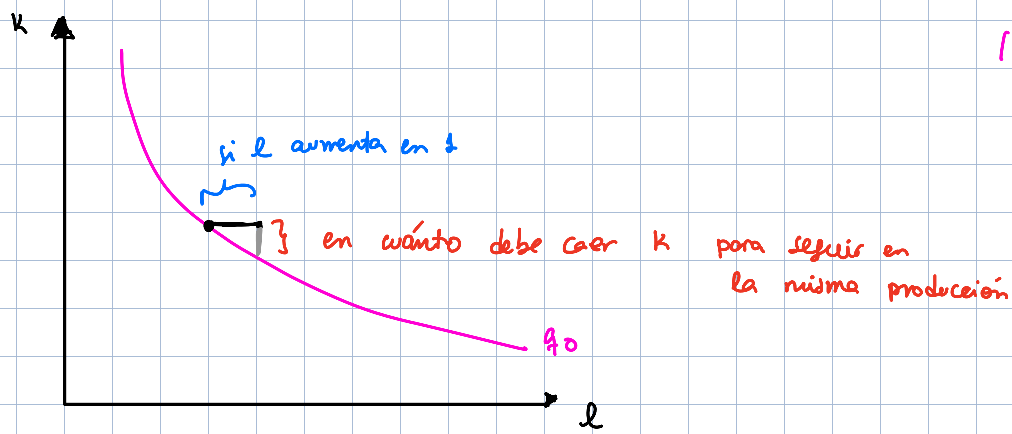
2) $\underbrace{\frac{\partial PMg_j}{\partial j}}_{\text{También se usa } f_{\ell\ell} \text{ y } f_{KK}.} < 0 \quad , \quad j = K, \ell$ Retornos decrecientes

Def.- (Tasa Marginal de Sustitución Técnica, TMST) nos indica cuánto de capital k debo reducir al aumentar en una unidad el trabajo ℓ de manera que la producción queda constante.

$$TMST_{\ell,k} = -\frac{\partial f(k,\ell)/\partial \ell}{\partial f(k,\ell)/\partial k}$$

$$= -\frac{PMg_\ell}{PMg_k} = \underbrace{\left.\frac{\partial k}{\partial \ell}\right|_{q=q_0}}_{\text{pendiente de la isocuanta}}$$

(similar a la curva de indif.)



Podemos derivar esta pendiente tal como hicimos en la teoría del consumidor. Partiendo de $q = f(k,\ell)$ tomamos un diferencial total

$$dq = \frac{\partial f}{\partial \ell}\, d\ell + \frac{\partial f}{\partial k} \cdot dk \underbrace{= 0}_{}$$

no cambia q. Es decir, no nos movemos de isocuanta.

$$\Rightarrow \quad \frac{dk}{d\ell} = -\frac{\partial f/\partial \ell}{\partial f/\partial k} = -\frac{PMg_\ell}{PMg_k}.$$

Rendimientos a escala

¿Qué sucede si expandimos todos los factores/insumos de producción en la misma proporción? (Ejemplo: duplicamos k y ℓ, o multiplicamos $\times 5$ ambos k y ℓ)

Dado cualquier $\alpha > 1$:

- Si $f(\alpha \ell, \alpha K) = \alpha^1 f(K,\ell) = \alpha q$, se llama rendimientos a escala constantes.
  (Homogénea de grado 1)

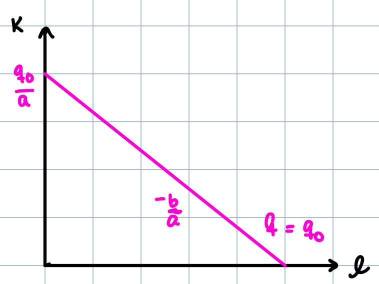
- Si $f(\alpha \ell, \alpha K) < \alpha^1 f(K,\ell) = \alpha q$, se llama rendimientos a escala decrecientes.
  (Homogénea de grado <1)

- Si $f(\alpha \ell, \alpha K) > \alpha^1 f(K,\ell) = \alpha q$, se llama rendimientos a escala crecientes.
  (Homogénea de grado >1)

Casos Particulares

1. **Lineal**: $q = aK + b\ell$, $a,b > 0$

Los factores son sustituibles a una tasa constante



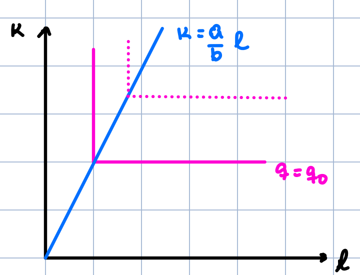
$\Rightarrow aK + b\ell = q_0$

$K = \frac{q_0}{a} - \frac{b}{a}\ell$

isocuantas son rectas

(*) Para ustedes: verifiquen que es homogenea de grado 1
(Retornos constantes a escala)

2. **Proporciones fijas**: $q = \min\{a\ell, bK\}$, $a,b > 0$



Necesito una proporción fija entre ambos factores para producir. Ej: salchicha y papas para producir salchipapas.

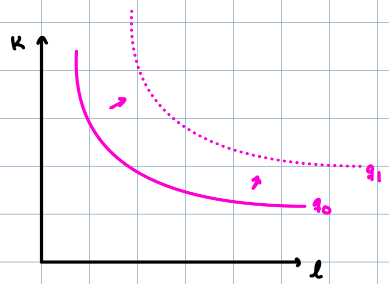
(*) Todas las esquinas se representan por

$a\ell = bK$

$\Rightarrow K = \frac{a}{b}\ell$

(*) Para ustedes: verifiquen que es homogenea de grado 1 (Retornos constantes a escala)

3. **Cobb Douglas:** $q = A\,\ell^{\alpha} K^{\beta}$, $A, \alpha, \beta > 0$

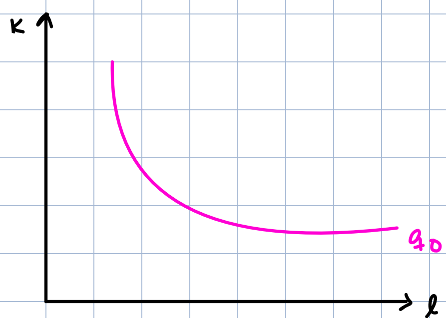


Homogeneidad:

$$f(z\ell, zK) = A(z\ell)^{\alpha}(zK)^{\beta}$$
$$= A z^{\alpha+\beta}\ell^{\alpha}K^{\beta}$$
$$= z^{\alpha+\beta} f(\ell, K)$$

$\Rightarrow$ si $\alpha+\beta>1$, rend. crecientes a escala.
si $\alpha+\beta=1$, rend. constantes a escala.
si $\alpha+\beta<1$, rend. decreciente a escala.

4. **CES:** $q = [a_1 \ell^{\rho} + a_2 K^{\rho}]^{1/\rho}$, $a_1, a_2 > 0$, $\rho < 1$.



(*) Recordatorio: elasticidad de sustitución

$$\sigma = \frac{\Delta\%(K/\ell)}{\Delta\%(|TMST|)} = \frac{\partial \log(K/\ell)}{\partial \log(|TMST|)}$$

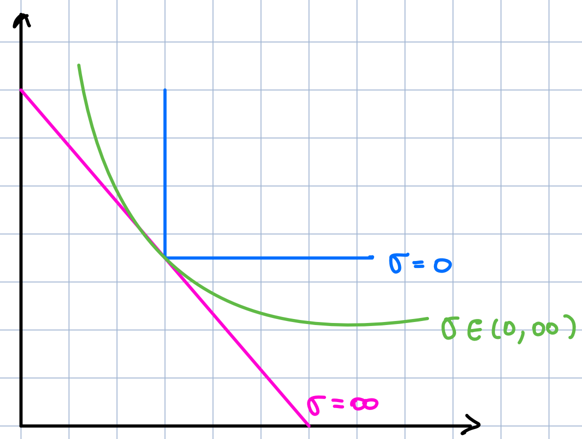
En este caso $\quad TMST = -\frac{a_1}{a_2}\left(\frac{K}{\ell}\right)^{1-\rho}$

$$\Rightarrow \quad \log\left(\frac{K}{\ell}\right) = \frac{1}{1-\rho}\log(|TMST|) - \frac{1}{1-\rho}\log\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{1-\rho}.$$

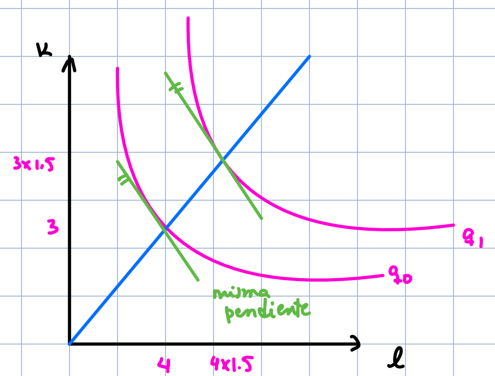
A medida que $Pmg\ell / PmgK$ es mayor debe ser que ℓ es más escaso relativo a K para que su productividad marginal sea mayor.

Entonces, tenemos de manera similar que



Además, como recordarán, todas estas funciones cumplen con la propiedad llamada homoteticidad.

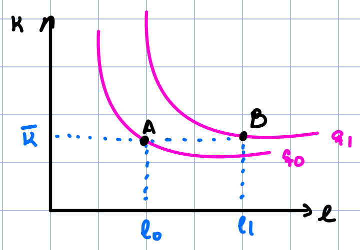
Todos los puntos donde k y ℓ están en la misma proporción tienen la misma pendiente (TMST).



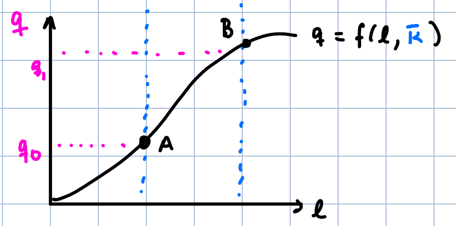
Función de Producción de Corto Plazo

- Corto plazo.- situación en que el capital es constante (no es tan fácil ajustarlo en comparación al trabajo).
- Largo plazo.- situación en que capital no es constante (es decir, es flexible).

Entonces, en el corto plazo se ve algo así

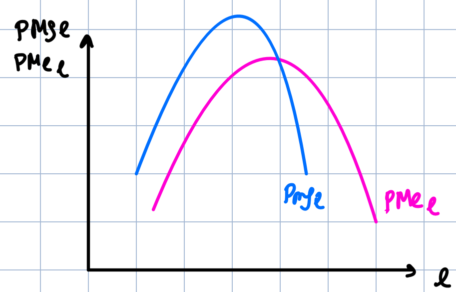


isocuantas



función de producción
de corto plazo
(solo depende de ℓ)

Además, así se ven la PMg_ℓ y el PMe_ℓ



Noten que el PMe_ℓ alcanza su punto máximo donde cruza con PMg_ℓ :

Máximo cuando $\frac{\partial PMe_\ell}{\partial \ell} = 0$: $\frac{\partial}{\partial \ell}\left\{\underbrace{\frac{f(K,\ell)}{\ell}}_{PMe_\ell}\right\} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ell}\frac{\partial f(K,\ell)}{\partial \ell} - \frac{f(K,\ell)}{\ell^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ell}\left[PMg_\ell - PMe_\ell\right] = 0$$

$$\Rightarrow PMg_\ell = PMe_\ell .$$