La demanda marshalliana $x_i^m(p, m)$ es homogenea de grado 0 en precios e ingreso:
$\uparrow$ $p = (p_1, p_2)$

$$x_i^m(tp, tm) = \underbrace{t^0}_{=1} x_i^m(p, m) \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n.$$

<u>Ejemplo</u>: En $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ teníamos

$$x_1^m = \frac{m}{p_1} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad x_2^m = \frac{m}{p_2} \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

Si multiplicamos t a todos los precios e ingresos no afecta nada:

$$x_1^m = \frac{t \times m}{t \times p_1} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad x_2^m = \frac{t \times m}{t \times p_2} \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

$$= \frac{m}{p_1} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad = \frac{m}{p_2} \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

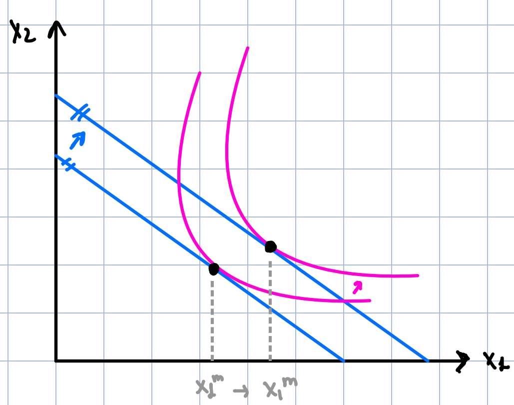
<u>Def</u>: (Efecto ingreso) Llamamos efecto ingreso del bien i a la sgte derivada:

$$\frac{\partial x_i^m(p_1, p_2, m)}{\partial m}$$

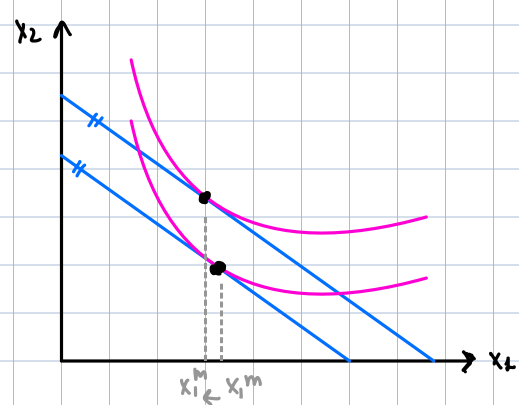
Además, si $\dfrac{\partial x_i^m(p, m)}{\partial m} \geq 0$ el bien i es llamado bien normal
(a ↑ ingreso consumo más)

$\dfrac{\partial x_i^m(p, m)}{\partial m} < 0$ el bien i es llamado bien inferior
(a ↑ ingreso consumo menos)

Gráficamente:

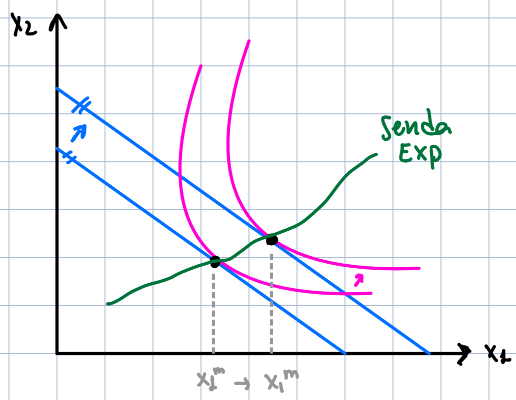


Efecto ingreso > 0. Al aumentar m se consume más de x_1.

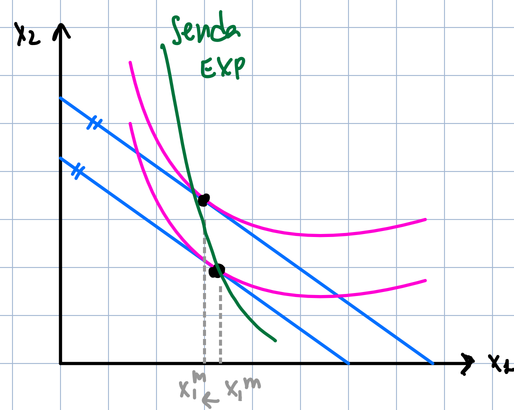


Efecto ingreso < 0. Al aumentar m se consume menos de x_1.

Def: (Senda de Expansión) Es la curva que muestra los distintos óptimos (marshallianos) a medida que aumenta el ingreso.



Efecto ingreso > 0. Al aumentar m se consume más de x_1.

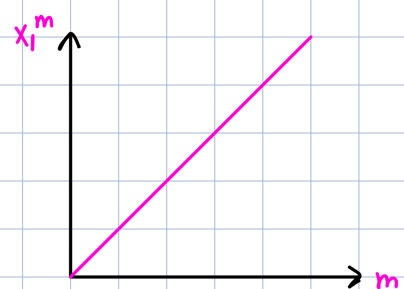


Efecto ingreso < 0. Al aumentar m se consume menos de x_1.

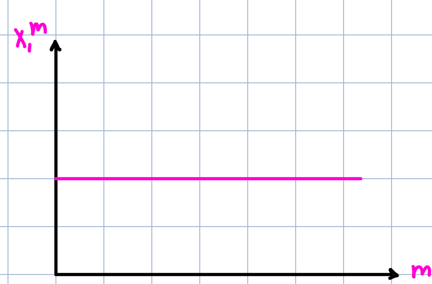
Def: (Curva de Engel) Es una curva que muestra la relación entre la cantidad consumida de un bien y el nivel de ingresos.

Ejemplos:

$$x_1^m = \frac{m}{p_1} \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$



$$x_1^m = \left(\frac{1}{a_1}\frac{p_1}{p_2}\right)^2$$

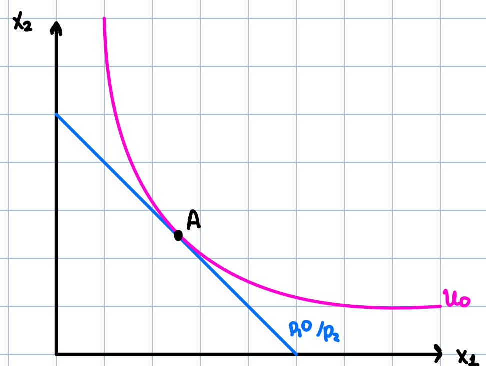


El nivel de consumo de los hogares / consumidores nos da información sobre su bienestar (utilidad), y por eso nos interesará ver qué pasa cuando hay algún cambio en precios.

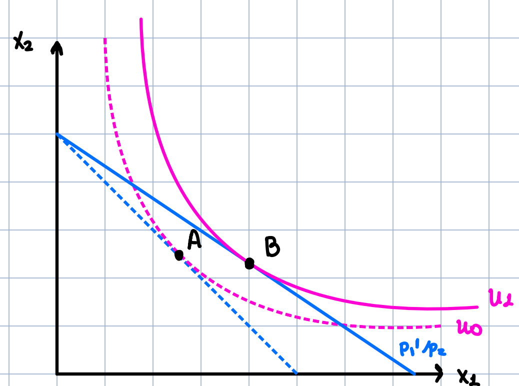
1. Paradigma de Hicks

- **Efecto sustitución** (ES): cambio en consumo debido a cambios en el precio, manteniendo la utilidad inicial constante.
- **Efecto ingreso** (EI): cambio en consumo debido únicamente al cambio en ingresos, manteniendo los precios nuevos.
- **Efecto total** (ET): Es la suma de ambos efectos. Es decir, $ET = ES + EI$.

Vamos a estudiar el caso en que cae P_1 : $P_1^0 \rightarrow P_1^1$ donde $P_1^1 < P_1^0$

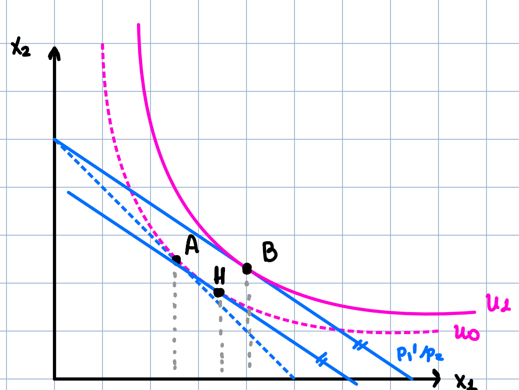


Equilibrio inicial A
con precios P_1^0 / P_2



Nuevo Equilibrio B
con nuevo precio P_1^1 / P_2

Ahora, lo que dice Hicks es que tracemos una paralela con los nuevos precios P_1'/P_2 pero tangente a la curva de utilidad inicial u_0.

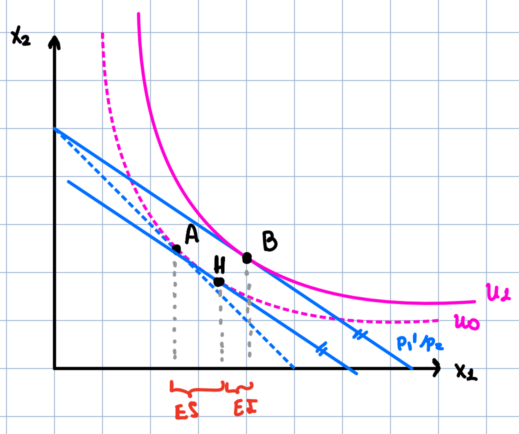


$x_1^h(P_1^0, P_2, u_0) = x_1^m(P_1^0, P_2, m)$

$x_1^h(P_1^1, P_2, u_0)$

$x_1^m(P_1', P_2, m) = x_1^h(P_1^1, P_2, u_1)$

Ahora que sabemos cómo hallar el consumo de esos puntos A, H y B, definimos los efectos según Hicks:



ET := cambio total en demanda de x_1.

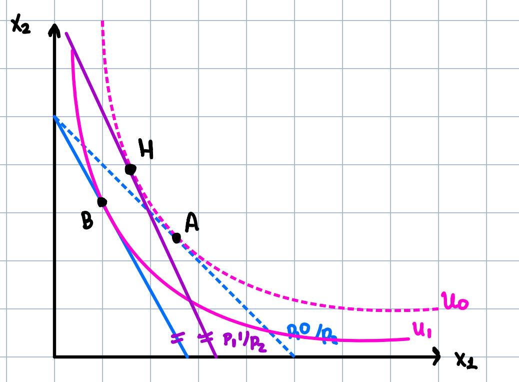
1.1. Variación Compensatoria a lo Hicks

VC: ¿cuánto deberíamos compensar al ingreso del consumidor para que con los nuevos precios quede con su bienestar inicial u_0?

Noten que si ✓ P_1 aumenta ⇒ entregamos ingreso para regresarlos a u_0 (porque se ha perjudicado)

✓ P_1 disminuye ⇒ quitamos ingreso para regresarlos a u_0 (porque se ha beneficiado)

- P_1 aumenta



La diferencia de gasto entre la curva ● y la curva ● nos dice cuánto hay que compensar para mover al individuo del punto B al punto H.

$$VC = \underbrace{e(P_1^1, P_2, u_0)}_{\text{Gasto en H}} - \underbrace{e(P_1^0, P_2, u_0)}_{\text{Gasto en mi nivel inicial A. Recuerden que esto es igual a m}}$$

$$\overset{\text{idéntico}}{=} e(P_1^1, P_2, u_0) - \underbrace{e(P_1^1, P_2, u_1)}_{\text{Gasto en B es igual que el gasto en A porque mi ingreso no ha cambiado, sino el precio.}}$$

Podemos calcular la función de gasto con esos precios y utilidad y obtener la VC.

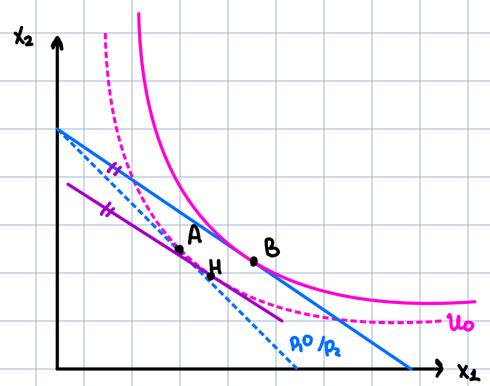
Otro truco es usar la siguiente igualdad:

$$VC = e(p_1^1, p_2, u_0) - e(p_1^0, p_2, u_0)$$

$$\underset{\text{Teorema Fundamental del Cálculo}}{=} \int_{p_1^0}^{p_1^1} \frac{\partial e(p_1, p_2, u_0)}{\partial p_1} dp_1 \underset{\text{por lema de Shepard}}{=} \int_{p_1^0}^{p_1^1} x_1^h(p_1, p_2, u_0)\, dp_1$$

* Tarea para ustedes: Calculen la VC cuando $u(x_1, x_2) = x_1^{0.3} x_2^{0.7}$ y $p_1^0 = 1$, $p_1^1 = 2$, $p_2 = 1$, $m = 10$.

- p_1 disminuye



La diferencia de gasto entre la curva 🟣 y la curva 🔵 nos dice cuánto hay que compensar (quitar) para mover al individuo del punto B al punto H.

$$VC = \underbrace{e(p_1^0, p_2, u_0)}_{\text{Gasto en mi nivel inicial A. Recuerden que esto es igual a } m} - \underbrace{e(p_1^1, p_2, u_0)}_{\text{Gasto en H}}$$

$$\underset{\text{idéntico}}{=} \underbrace{e(p_1^1, p_2, u_1)}_{\text{Gasto en B es igual que el gasto en A porque mi ingreso no ha cambiado, sino el precio.}} - e(p_1^1, p_2, u_0)$$

Siguiendo la misma idea tenemos

$$VC = e(p_1^0, p_2, u_0) - e(p_1^1, p_2, u_0)$$

$$\underset{\text{Teorema Fundamental del Cálculo}}{=} \int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial e(p_1, p_2, u_0)}{\partial p_1} dp_1 \underset{\text{por lema de Shepard}}{=} \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1^h(p_1, p_2, u_0)\, dp_1 .$$

* Tarea para ustedes: Calculen la VC cuando $u(x_1, x_2) = x_1^{0.3} x_2^{0.7}$ y $p_1^0 = 2$, $p_1^1 = 1$, $p_2 = 1$, $m = 10$.

1.2. Variación Equivalente a lo Hicks

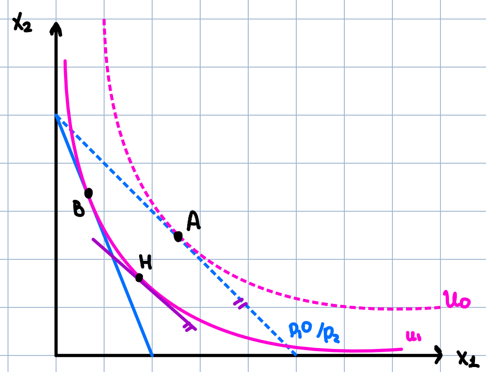
VE : ¿Cómo debería modificar el ingreso para que, sin que ocurra el cambio, quede con un bienestar u_1 como si hubiese habido cambio?
(de precio)

⇒ ¿Cuánta plata equivale mover a la persona a u_1 de la misma manera que mover el precio lo hubiera hecho?

Noten que si ✓ p_1 aumenta ⇒ quitamos ingreso para mover a u_1 más bajo
(porque $\uparrow p_1$ significa que cae la utilidad)

✓ p_1 disminuye ⇒ quitamos ingreso para mover a u_1 más alto
(porque $\downarrow p_1$ significa que aumenta la utilidad)

- p_1 aumenta



Trazamos una recta paralela a la R.P inicial (precios p_1^0) pero tangente a u_1.

La diferencia de gasto entre la curva y la curva nos dice cuánto hay que compensar (dar) para mover al individuo de u_0 a u_1 sin alterar los precios.

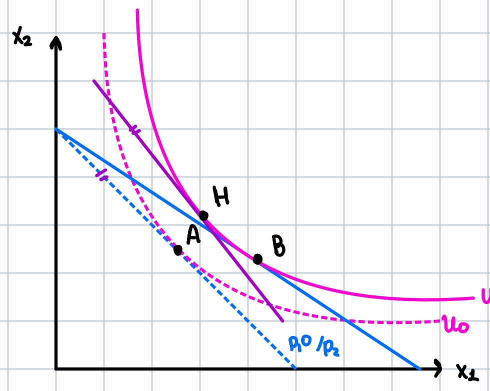
$$VE = \underbrace{e(p_1^0, p_2, u_0)}_{\substack{\text{Gasto inicial en A} \\ (\text{igual a } m)}} - \underbrace{e(p_1^0, p_2, u_1)}_{\substack{\text{El gasto que requiero para estar} \\ \text{en } u_1 \text{ con los precios } p_1^0. \\ (\text{punto H})}}$$

$$\underset{\text{idéntico}}{=} \underbrace{e(p_1^1, p_2, u_1)}_{\text{Gasto en C}} - e(p_1^0, p_2, u_1)$$

Siguiendo la misma idea tenemos

$$VE = e(p_1', p_2, u_1) - e(p_1^0, p_2, u_1) \underset{\substack{\text{Teorema} \\ \text{Fundamental} \\ \text{del Cálculo}}}{=} \int_{p_1^0}^{p_1'} \frac{\partial e(p_1, p_2, u_1)}{\partial p_1}\, dp_1 \underset{\substack{\text{por} \\ \text{lema} \\ \text{de} \\ \text{Shepard}}}{=} \int_{p_1^0}^{p_1'} x_1^h(p_1, p_2, u_1)\, dp_1 .$$

• P_1 disminuye



La diferencia de gasto entre la curva ● y la curva ● nos dice cuánto hay que compensar (quitar) para mover al individuo de u_0 a u_1 sin alterar los precios.

$$VE = \underbrace{e(p_1^0, p_2, u_1)}_{\text{El gasto que requiero para estar en } u_1 \text{ con los precios } p_1^0 \text{ (punto H)}} - \underbrace{e(p_1^0, p_2, u_0)}_{\text{Gasto inicial en A (igual a m)}}$$

$$\underset{\text{idéntico}}{=} e(p_1^0, p_2, u_1) - \underbrace{e(p_1^1, p_2, u_1)}_{\text{Gasto en C}}$$

Siguiendo la misma idea tenemos

$$VE = e(p_1^0, p_2, u_1) - e(p_1^1, p_2, u_1) \underset{\text{Teorema Fundamental del Cálculo}}{=} \int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial e(p_1, p_2, u_1)}{\partial p_1}\, dp_1 \underset{\text{por lema de Shepard}}{=} \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1^h(p_1, p_2, u_1)\, dp_1 .$$

1.3 Ecuación de Slutsky

La compensación según el paradigma de Hicks representa una idea de descomponer el cambio total en efecto ingreso y efecto sustitución. Veamos de donde sale esto:

$$\frac{\partial x_i^h(p, u_0)}{\partial p_j} \underset{\text{dualidad}}{=} \frac{\partial}{\partial p_j}\left\{ x_i^m(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u_0)) \right\}$$

$$\underset{\text{regla de cadena}}{=} \frac{\partial x_i^m(p, e(p, u_0))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^m(p, e(p, u_0))}{\partial e(p, u_0)} \cdot \frac{\partial e(p, u_0)}{\partial p_j}$$

$$\underset{\text{Lema de Shepard}}{=} \frac{\partial x_i^m(p, m)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^m(p, m)}{\partial m} \cdot x_j^h(p, u_0)$$

Ahora vamos a re-acomodar la ecuación

$$\underbrace{\frac{\partial x_i^m(p,m)}{\partial p_j}}_{\text{Efecto total}} = \underbrace{\frac{\partial x_i^h(p,u_0)}{\partial p_j}}_{\text{Efecto sustitución de Hicks}} - \underbrace{\frac{\partial x_i^m(p,m)}{\partial m} \cdot x_j^h(p,u_0)}_{\text{Efecto ingreso de Hicks}} \qquad (1)$$

La ecuación (1) es la ecuación más importante de la teoría del consumidor, y lleva por nombre la Ecuación de Slutsky.

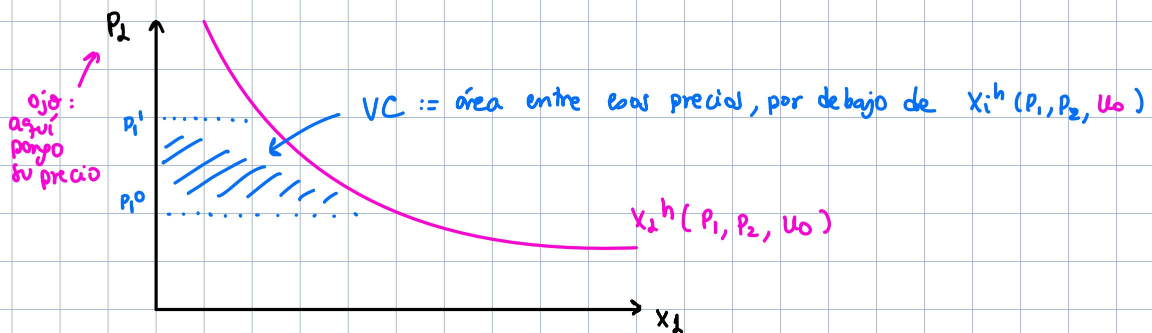
Esta ecuación nos permite descomponer el efecto total en ES y EI que nos permitió calcular la variación compensatoria.

Para el caso de descomponer el efecto total para la variación equivalente reemplazamos u_0 por u_1 en la ecuación de Slutsky.

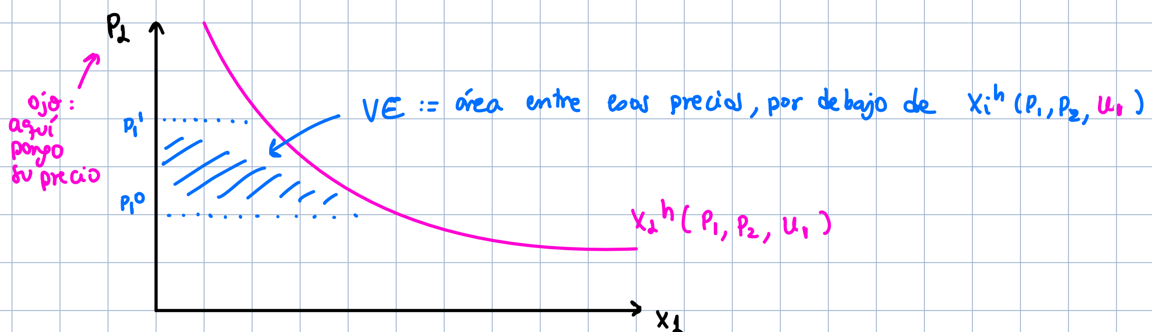
1.4 VC y VE como medidas de bienestar

Hemos visto que para un cambio de p_1^0 hacia p_1^1 mayor, tenemos

$$VC = \int_{p_1^0}^{p_1^1} x_i^h(p_1, p_2, u_0)\, dp_1$$



$$VE = \int_{p_1^0}^{p_1^1} x_i^h(p_1, p_2, u_1)\, dp_1$$



Es decir, ambas variaciones están ligadas a lo que ocurre con cambios de precio en la curva de demanda, y por tanto a conceptos de bienestar como los cambios de excedente del consumidor.

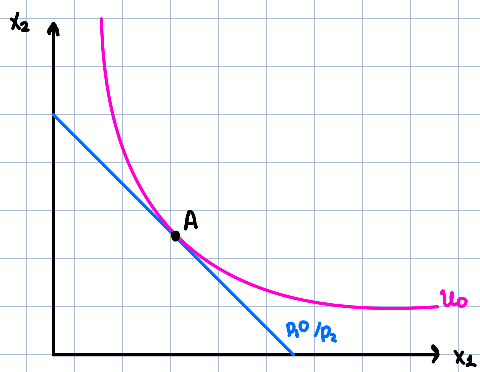
2. Paradigma de Slutsky

- **Efecto sustitución** (ES): cambio en consumo debido a cambios en el precio, manteniendo la capacidad inicial de compra.

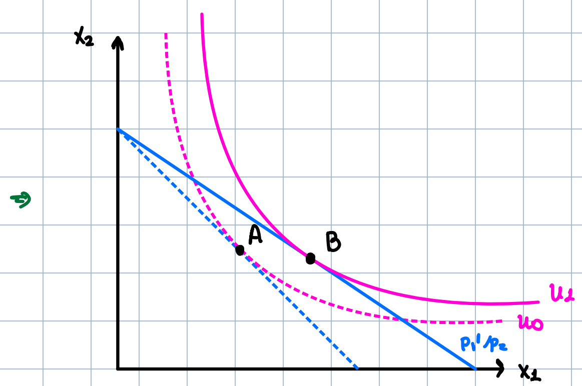
- **Efecto ingreso** (EI): cambio en consumo debido únicamente al cambio en ingresos (capacidad de compra)

- **Efecto total** (ET): Es la suma de ambos efectos. Es decir, $ET = ES + EI$.

Vamos a estudiar el caso en que cae p_1 : $p_1^0 \to p_1^1$ donde $p_1^1 < p_1^0$

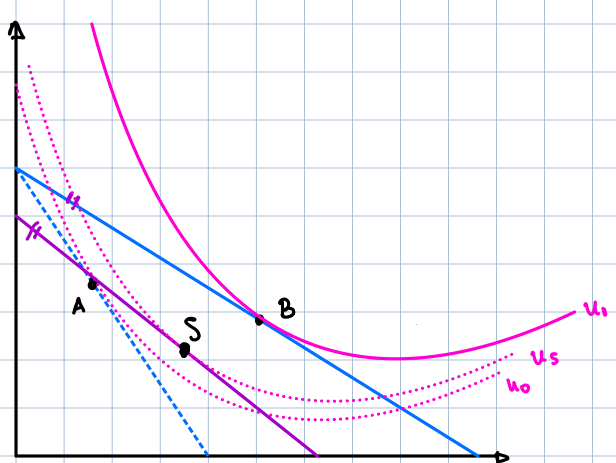


Equilibrio inicial A
con precios p_1^0/p_2



Nuevo Equilibrio B
con nuevo precio p_1^1/p_2

Ahora, lo que dice Slutsky es que tracemos una paralela con los nuevos precios p_1^1/p_2 pero que pase por encima del punto de consumo inicial A.



A S B

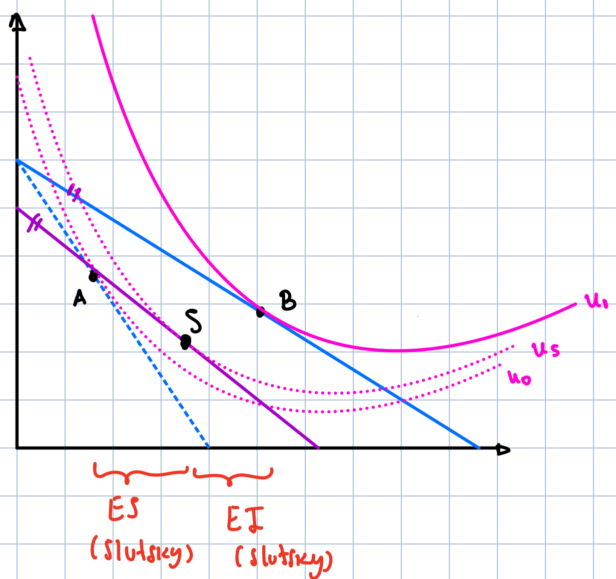
$x_1^h(p_1^0,p_2,u_0) = x_1^m(p_1^0,p_2,m)$ ↵

$x_1^m(p_1^1,p_2,\underbrace{e_S}) = x_1^h(p_1^1,p_2,u_S)$ ←

$$e_S = \underbrace{p_1^1\, x_1^m(p_1^0,p_2,m) + p_2\, x_2^m(p_1^0,p_2,m)}_{\text{gasto comprar la canasta inicial con los nuevos precios}}$$

→ $x_1^m(p_1^1,p_2,m) = x_1^h(p_1^1,p_2,u_1)$

Ahora



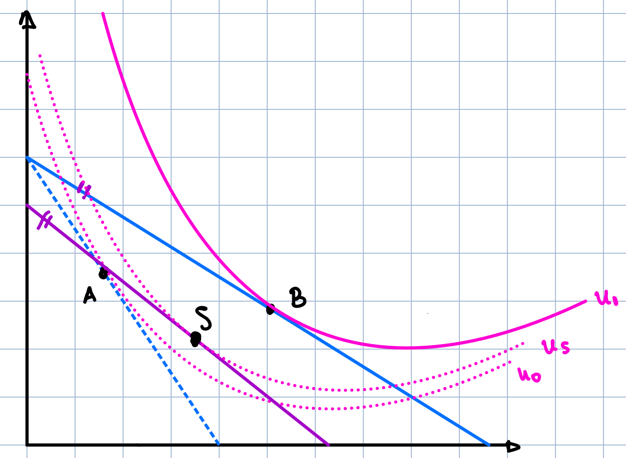
2.1. Variación Compensatoria a lo Slutsky

VC: ¿cuánto deberíamos compensar al ingreso del consumidor para que con los nuevos precios sea capaz de comprar su canasta inicial A ?

Noten que si ✓ P_1 aumenta ⇒ entregamos ingreso para regresarlos al gasto A con nuevos precios (porque se ha perjudicado)

✓ P_1 disminuye ⇒ quitamos ingreso para regresarlos a A con nuevos precios (porque se ha beneficiado)

• P_1 disminuye



La diferencia de gasto entre la curva y la curva nos dice cuánto hay que compensar (quitar) para mover al individuo del punto B al punto S.

$$VC = \underbrace{e(p_1^0, p_2, u_0)}_{\text{Gasto en mi nivel inicial A. Recuerden que esto es igual a } m} - \Big[\underbrace{p_1^1\, x_1^m(p_1^0, p_2, m) + p_2\, x_2^m(p_1^0, p_2, m)}_{\text{Gasto en A con nuevos precios}}\Big]$$

Slutsky

$$= p_1^0\, x_1^m(p_1^0, p_2, m) + p_2\, x_2^m(p_1^0, p_2, m) - \left[p_1^1\, x_1^m(p_1^0, p_2, m) + p_2\, x_2^m(p_1^0, p_2, m)\right] = (p_1^1 - p_1^0)\, x_1^m(p_1^0, p_2, m)$$

(*) Fíjense que a diferencia de Hicks, no podemos expresar esto en término de demandas Hicksianas y, por tanto, usando integrales.

3. Elasticidades

3.1 Elasticidad precio de demanda

siempre me refiero a log natural

$$\underbrace{\varepsilon_{x_1, p_1}}_{\substack{<0 \\ \text{en casi todos los casos}}} = \frac{\Delta\% \; x_1}{\Delta\% \; p_1} \approx \frac{\partial \log x_1}{\partial \log p_1} = \underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial p_1}}_{<0} \cdot \underbrace{\frac{p_1}{x_1}}_{>0}$$

en casi todos los casos

Ejemplo:

$$x_1^m = \frac{m}{2p_1} \Rightarrow \varepsilon_{x_1, p_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{x_1} = -\frac{m}{2p_1^2} \cdot \frac{p_1}{(m/2p_1)} = -1.$$

$$x_1^h = u_0 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/2} \Rightarrow \varepsilon_{x_1, p_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{x_1} = -\frac{1}{2} u_0\, p_2^{1/2}\, p_1^{-3/2} \cdot \frac{p_1}{u_0\, p_2^{1/2}\, p_1^{-1/2}}$$

$$= -\frac{p_1^{-1}}{2}$$

Tenemos la siguiente clasificación según $|\varepsilon|$ ← valor abs. de una elasticidad

- ✓ perfectamente elástica ∞
- ✓ elástica >1
- ✓ elasticidad unitaria 1
- ✓ inelástica <1
- ✓ perfectamente inelástica 0

Cuando usamos x_1^m le llamamos elasticidad no compensada $\varepsilon^u_{x_1,p_1}$ y cuando usamos x_1^h le llamamos elasticidad compensada $\varepsilon^c_{x_1,p_1}$.

3.2 Elasticidad ingreso

$$\underbrace{\varepsilon_{x_1,m}}_{\substack{>0 \\ \text{bien normal}}} = \frac{\Delta\%\, x_1}{\Delta\%\, m} \approx \frac{\partial \log x_1}{\partial \log m} = \underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial m}}_{\substack{>0 \\ \text{bien normal}}} \cdot \underbrace{\frac{m}{x_1}}_{>0}$$

3.3 Elasticidad cruzada de precios

$$\underbrace{\varepsilon_{x_1,p_2}}_{\text{puede ser } >0 \text{ ó } <0} = \frac{\Delta\%\, x_1}{\Delta\%\, p_2} \approx \frac{\partial \log x_1}{\partial \log p_2} = \underbrace{\frac{\partial x_1}{\partial p_2}}_{} \cdot \underbrace{\frac{p_2}{x_1}}_{>0}$$

p_2: precio del otro bien

>0 : sustitutos brutos

<0 : complementarios brutos

3.4 Ecuación de Slutsky en elasticidades

$$\frac{\partial x_i^m(p,m)}{\partial p_j} \times \frac{p_j}{x_i^m(p,m)} = \frac{\partial x_i^h(p,u_0)}{\partial p_j} \times \frac{p_j}{\underbrace{x_i^m(p,m)}_{=x_i^h(p,u_0)}} - \frac{\partial x_i^m(p,m)}{\partial m} \cdot \frac{p_j}{x_i^m} \overbrace{x_j^h(p,u_0)}^{=x_j^m(p,m)} \frac{m}{m}$$

$$\Rightarrow \varepsilon^u_{x_i,p_j} = \varepsilon^c_{x_i,p_j} - \varepsilon_{x_i,m}\, s_j \quad , \text{ donde } \quad s_j = \frac{p_j\, x_j^m}{m}$$

proporción de gasto en x_j