Problema de maximización de Utilidad

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_n} \quad u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$ → utilidad es la f. objetivo

s.a.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq m$$ → 1 restricción de desigualdad : gastos ≤ ingresos

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$ → n restricciones de desigualdad : consumo no puede ser negativo.

donde los precios e ingresos son dados.

(*) Recordatorio :
- ✓ $U_{x_i} > 0 \quad \forall i$ ($u(\cdot)$ representa preferencias monótonas)
- ✓ $u(\cdot)$ es continua y diferenciable de 2° grado.

Para propósitos de este curso, nuevamente, nos centraremos en el caso de $n=2$. Cuando hay más bienes se procede igual pero perdemos intuición gráfica.

$$\mathcal{L} = u(x_1, x_2) - \lambda (p_1 x_1 + p_2 x_2 - m) - \gamma_1 (0 - x_1) - \gamma_2 (0 - x_2)$$

↳ El lagrangeano se conoce también como una función valor. Significa que esta función representa la utilidad (f. objetivo) considerando sus restricciones. La solución del siguiente problema equivale al problema original :

$$\max_{\substack{x_1, x_2 \\ \lambda, \gamma_1, \gamma_2}} \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda, \gamma_1, \gamma_2) = \max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2)$$

s.a.

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Fíjense lo que hacen los multiplicadores de Lagrange :

- $$\mathcal{L} = u(x_1, x_2) - \lambda \underbrace{(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)} - \gamma_1 (0 - x_1) - \gamma_2 (0 - x_2)$$

  Si $p_1 x_1 + p_2 x_2 > m$ (incumplo la restricción) entonces la f. objetivo (utilidad) cae, porque estoy multiplicando por un número negativo. Recuerden que quiero MAXIMIZAR, no quiero que hayan cosas que resten.

- $$\mathcal{L} = u(x_1, x_2) - \lambda (p_1 x_1 + p_2 x_2 - m) - \gamma_1 \underbrace{(0 - x_1)} - \gamma_2 (0 - x_2)$$

  Si $0 - x_1 > 0 \Rightarrow x_1 < 0$, entonces también penaliza.

Condiciones de Kuhn-Tucker :

$[x_1]$ $\quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad Umg_1 - \lambda p_1 + \gamma_1 = 0$

$[x_2]$ $\quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Umg_2 - \lambda p_2 + \gamma_2 = 0$

$[\lambda]$ $\quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \cdot \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad (p_1 x_1 + p_2 x_2 - m) \cdot \lambda = 0$

$[\gamma_1]$ $\quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_1} \cdot \gamma_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot \gamma_1 = 0$

$[\gamma_2]$ $\quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_2} \cdot \gamma_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \cdot \gamma_2 = 0$

Vean que significa lo de las restricciones de desigualdad

$\underbrace{(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m) \cdot \lambda}$ $= 0$

Dos opciones :

1) $p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0$ y $\lambda > 0$

2) $p_1 x_1 + p_2 x_2 - m < 0$ y $\lambda = 0$

$\Downarrow$

Este es fácil porque si hay monotonicidad los consumidores prefieren usar el dinero en consumo que dejarlo ahí. Es decir, siempre estamos en la opción 1.

$\underbrace{x_1 \cdot \gamma_1}$ $= 0$

Dos opciones :

1) $x_1 > 0$ y $\gamma_1 = 0$

2) $x_1 = 0$ y $\gamma_1 > 0$

$\underbrace{x_2 \cdot \gamma_2}$ $= 0$

Dos opciones :

1) $x_2 > 0$ y $\gamma_2 = 0$

2) $x_2 = 0$ y $\gamma_2 > 0$

Tenemos 3 opciones por probar, al final del día :

1) Solución interior

$x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$

2) Solución esquina en x_1

$x_1 = 0$, $x_2 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 = 0$

3) Solución esquina en x

$x_1 > 0$, $x_2 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 > 0$

Por monotonicidad no puede ocurrir $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ (más de algo es siempre mejor).

En la práctica vamos a siempre probar primero con la solución interior, que nos deja las siguientes condiciones (de primer orden):

- $\underbrace{Umg_i}_{\text{El beneficio marginal de comer una unidad más del bien } i.} = \underbrace{\lambda p_i}_{\text{El costo marginal -en términos de mi función valor- de comer una unidad más de } i.}$ para $i = 1, 2$

$\Rightarrow$ λ me indica la penalidad (costo) de exceder mis gastos de mis ingresos: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} = \lambda$

Tener 1 sol más disponible nos da λ de valor (utilidad) adicional.

Entonces comprar 1 unidad más de i es como tener P_i soles menos de ingreso disponible. Eso reduce λP_i mi valor.

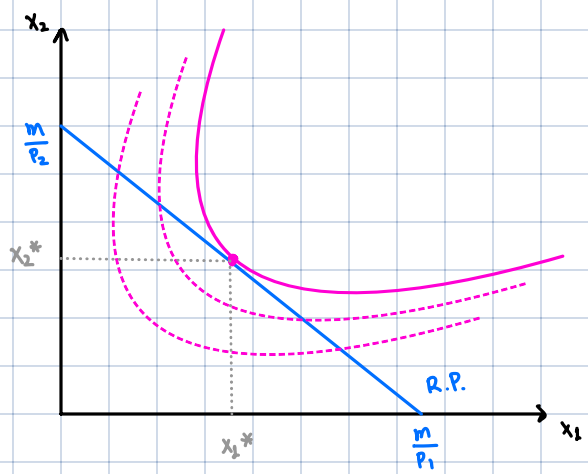
- $P_1 x_1 + P_2 x_2 = m$

Fíjense que pasa si combinamos la primera condición de ambos bienes

$$\left.\begin{aligned} Umg_1 &= \lambda P_1 \\ Umg_2 &= \lambda P_2 \end{aligned}\right\} \qquad \underbrace{\frac{Umg_1}{Umg_2}}_{|TMS_{21}|} = \underbrace{\frac{P_1}{P_2}}_{P_1/P_2}$$

$|TMS_{21}|$: la pendiente de la curva de indif.

P_1/P_2: la pendiente de la recta presupuestaria



El óptimo cumple que ambas pendientes se igualan y además estamos en la recta presupuestaria.

A este óptimo lo llamaremos demanda marshalliana y lo denotaremos $x_1^m(p, m)$ y $x_2^m(p, m)$.

Ejemplo: $u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} \; x_2^{1/2}$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $m = 10$.

Tenemos

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{1} \quad (1)$$

$$2x_1 + x_2 = 10 \quad (2)$$

Hay 2 ecuaciones para 2 incógnitas. Si resolvemos el consumo de uno de los bienes, entonces podemos usar (2) para resolver para el otro bien.

de (1) $x_2 = 2x_1$ y lo reemplazamos en (2)

$$2x_1 + 2x_1 = 10$$

$$\Rightarrow x_1^m = 5/2$$

Reemplazando x_1^m en (2) resolvemos para el otro bien:

$$2 \times 5/2 + x_2 = 10$$

$$\Rightarrow x_2^m = 5$$

Casos de funciones de utilidad

1. **Cobb Douglas** : $u(x_1, x_2) = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$

C.P.O. (condiciones de primer orden)

$$[x_1] \quad a_1 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2} - \lambda p_1 = 0$$

$$[x_2] \quad a_2 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad (1)$$

$$[\lambda] \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \quad (2)$$

Despejamos un bien en (1):

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2} \frac{a_2}{a_1} x_1 \quad (3)$$

Y reemplazamos (3) en (2):

$$p_1 x_1 + p_2 \frac{p_1}{p_2} \frac{a_2}{a_1} x_1 = m$$

$$\Rightarrow \quad x_1^m = \frac{a_1}{a_1+a_2} \cdot \frac{m}{p_1} \quad y \quad x_2^m = \frac{a_2}{a_1+a_2} \cdot \frac{m}{p_2}$$

Fíjense que x_i^m depende del vector de precios p y los ingresos m.

2. **CES** : $u(x_1, x_2) = (a_1 x_1^{\rho} + a_2 x_2^{\rho})^{1/\rho}$

C.P.O dan:

$$\frac{a_1}{a_2} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho} = \frac{p_1}{p_2} \quad (1)$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \quad (2)$$

Resolvemos para un bien en (1):

$$x_2 = \left(\frac{p_1}{p_2} \frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} x_1$$

$$= \left(\frac{p_1}{p_2} \frac{a_2}{a_1}\right)^{\sigma} x_1 \quad (3)$$

* Recuerden que la elasticidad de sustitución $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$.

Reemplazando ③ en ② :

$$p_1 x_1 + p_2 \; p_1^{\sigma} \; p_2^{-\sigma} \; a_2^{\sigma} \; a_1^{-\sigma} \; x_1 = m$$

$$p_1 x_1 + p_1 \, p_1^{-1} \, p_2 \; p_1^{\sigma} \; p_2^{-\sigma} \; a_2^{\sigma} \; a_1^{-\sigma} \; x_1 = m$$

$$p_1 x_1 \left[1 + p_2^{1-\sigma} \; p_1^{\sigma-1} \; a_2^{\sigma} a_1^{-\sigma} \right] = m$$

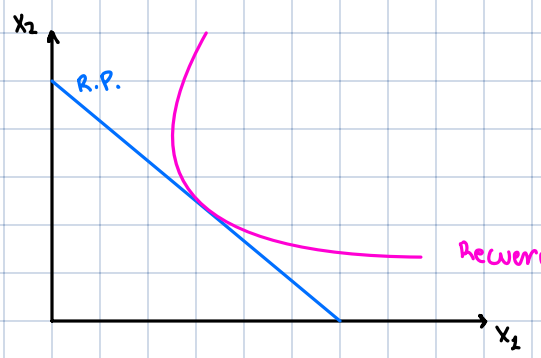
$$p_1 x_1 \left[\frac{a_1^{\sigma} \; p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma} \; a_2^{\sigma}}{a_1^{\sigma} \; p_1^{1-\sigma}} \right] = m$$

$$\Rightarrow \quad x_1^m = m \cdot \frac{p_1^{-\sigma} \, a_1^{\sigma}}{\left[a_1^{\sigma} p_1^{1-\sigma} + a_2^{\sigma} p_2^{1-\sigma} \right]}$$

Noten que el procedimiento es simétrico (igual) para x_2:

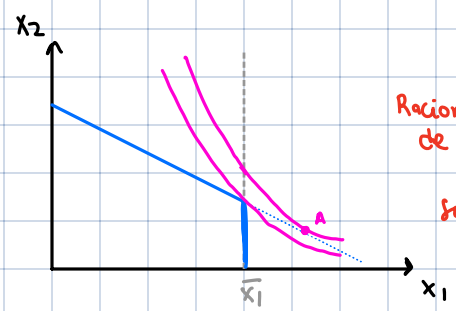
$$\Rightarrow \quad x_2^m = m \cdot \frac{p_2^{-\sigma} \, a_2^{\sigma}}{\left[a_1^{\sigma} p_1^{1-\sigma} + a_2^{\sigma} p_2^{1-\sigma} \right]}$$

Ambos casos anteriores se ven gráficamente así:



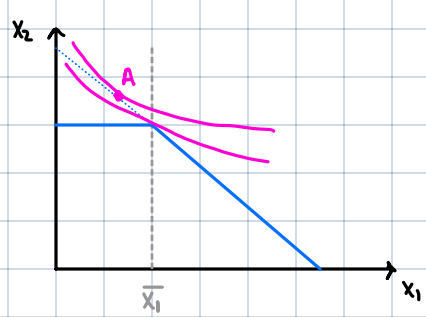
Recuerden que se ve así cuando $\sigma \in (0, \infty)$, y los dos casos anteriores lo cumplen si $\rho \neq 1$ y ρ es finito.

NO NECESARIAMENTE se cumplirá si hay racionamiento o algún cambio de pendiente en la R.P.



Racionamiento de x_1 + solución esquina

A no es accesible, así que $x_1^m = \bar{x}_1$ y $x_2^m = (m - p_1 \bar{x}_1)/p_2$.



Donación de x_1 + solución esquina

A no es accesible, así que $x_1^m = \bar{x}_1$ y $x_2^m = (m - p_1 \bar{x}_1)/p_2$.

Podemos verificar esto si hallamos la solución interior y resulta que está fuera de la R.P. Solo sucede en ciertas ocasiones.

Ahora veremos un caso de solución interior pero que no se halla usando las C.P.O usuales.

3. Complementos Perfectos : $u(x_1, x_2) = \min\{a_1 x_1, a_2 x_2\}$

"C.P.O":

$$a_1 x_1 = a_2 x_2 \quad (1)$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \quad (2)$$

→ Recuerden que esta es la curva por donde pasan todas las "esquinas"

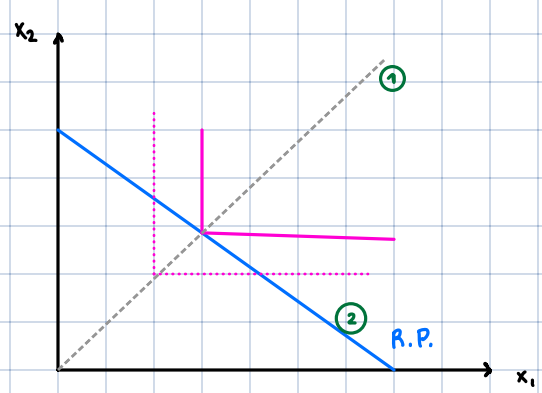
Entonces, podemos despejar (1):

$$x_2 = \frac{a_1}{a_2} x_1 \quad (3)$$

Y reemplazar en (2):

$$p_1 x_1 + p_2 \frac{a_1}{a_2} x_1 = m$$

$$\Rightarrow x_1^m = \frac{m}{[p_1 + p_2 a_1/a_2]}, \quad x_2^m = \frac{m}{[p_2 + p_1 a_2/a_1]}$$

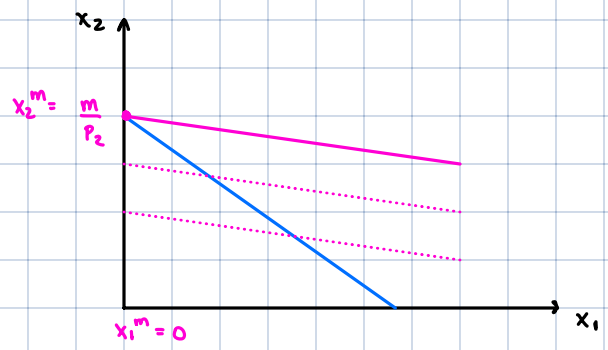


Noten que el óptimo es donde se cruzan ambas (1) y (2).

Ahora vamos a ver un caso en que no hay solución interior.

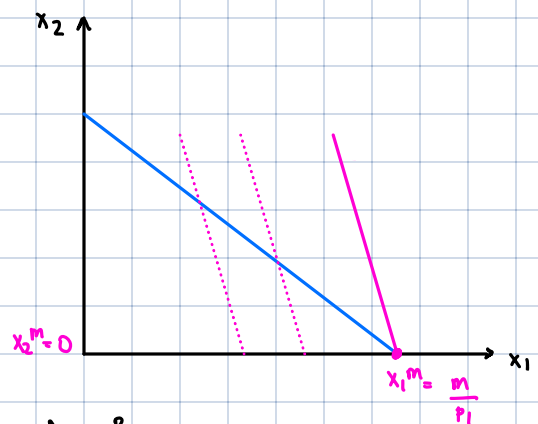
4. Sustitutos perfectos : $u(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2$

1) Caso I : $\underbrace{\frac{a_1}{a_2}}_{|TMS_{21}|} < \frac{p_1}{p_2}$ ⇒ la R.P. tiene más inclinación (es decir, más negativa).



$\underbrace{\frac{a_1}{a_2}}_{\text{Beneficio marginal de más } x_1} < \underbrace{\frac{p_1}{p_2}}_{\text{Costo marginal de más de } x_1}$ ⇒ ¡Nunca me compensa tener 1 unidad extra de x_1! Así que elijo $x_1^m = 0$ y gasto todo en $x_2^m = \frac{m}{p_2}$.

2) Caso II : $\underbrace{\frac{a_1}{a_2}}_{|TMS_{21}|} > \frac{p_1}{p_2}$ ⇒ la R.P. tiene menos inclinación (es decir, menos negativa).



$\underbrace{\frac{a_1}{a_2}}_{\text{Beneficio marginal de más } x_1} > \underbrace{\frac{p_1}{p_2}}_{\text{Costo marginal de más de } x_1}$ ⇒ ¡Siempre me compensa tener 1 unidad extra de x_1! Así que elijo gastar todo en x_1 : $x_1^m = \frac{m}{p_1}$, $x_2^m = 0$.

3) Caso III : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{p_1}{p_2}$ $\Rightarrow$ Misma inclinación

En este caso cualquier punto de la R.P. puede sostener un equilibrio. A esto se le llama equilibrio múltiple y no vamos a estudiar estos casos en este curso.

El último caso es una función de utilidad que puede tener solución de esquina como solución interior.

5. Cuasilineal

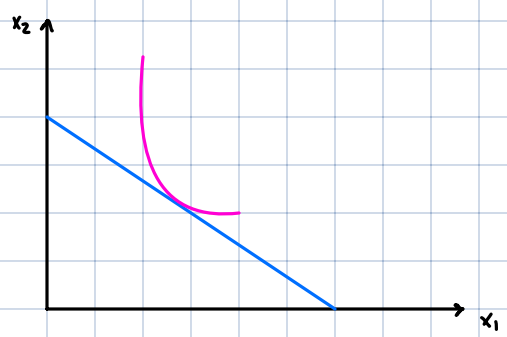
1) Cuasilineal en x_1 : $u(x_1, x_2) = a_1 x_1 + v(x_2)$

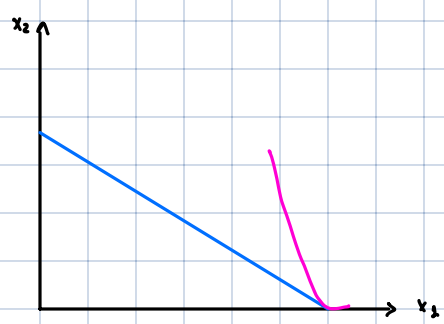
C.P.O :

$$\frac{a_1}{v'(x_2)} = \frac{p_1}{p_2} \quad (1)$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \quad (2)$$

Dependiendo de la función $v(\cdot)$ tenemos dos casos posibles :





2) Cuasilineal en x_2 : $u(x_1, x_2) = v(x_1) + a_2 x_2$

Es lo mismo que el caso anterior pero para el otro bien.

(*) En este caso debemos considerar que $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ para poder ver qué caso es consistente con nuestros datos del problema.

Problema de Minimización de Gasto

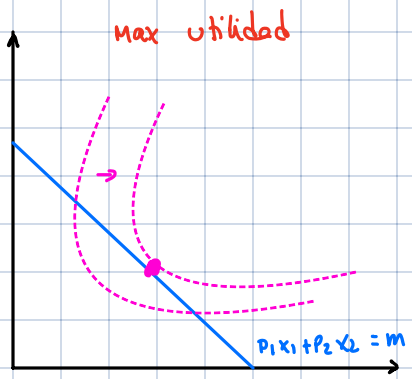
$$\min_{x_1,\dots,x_n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \longrightarrow \text{función objetivo es el gasto}$$

s.a.

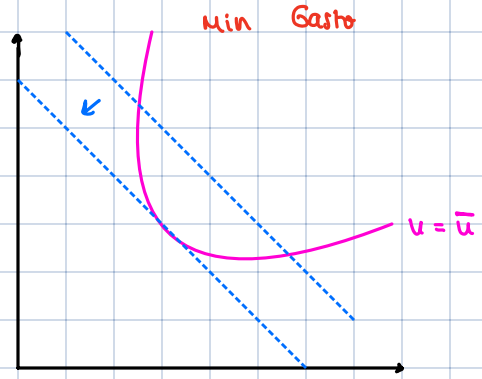
$$u(x_1,\dots,x_n) \geq \bar{U} \longrightarrow \bar{U} \text{ es un parámetro.}$$

Queremos minimizar el gasto, teniendo una utilidad de al menos $\bar{U}$.

Veamos la distinción de ambos problemas



Buscamos la curva de indif más alta dada una R.P.



Buscamos el gasto más bajo dada una curva de indiferencia de nivel $\bar{U}$.

Nuevamente nos centraremos en el caso de $n=2$.
Las condiciones de optimalidad, como pueden ver en el gráfico, son muy similares. En concreto, para la solución interna tenemos:

C.P.O

$$\frac{Umg_1}{Umg_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (1)$$

$$u(x_1,x_2) = \bar{U} \quad (2)$$

El resultado de este sistema de ecuaciones se conoce como demanda hicksiana y se denotan $x_i^h(p,\bar{U})$.

Def.- (Utilidad indirecta) La f. de utilidad indirecta es el nivel de utilidad en el consumo dado por las demandas marshallianas:

Prob. max utilidad

$$V(p,m) = u(x_1^m(p,m),\ x_2^m(p,m))$$

si introducimos el consumo óptimo en la función objetivo, nos da la utilidad indirecta.

Def.- (Gasto) La f. de gasto es el gasto dado por la demanda hicksiana:

Prob. min gastos

$$e(p,\bar{u}) = p_1\ x_1^h(p,\bar{u}) + p_2\ x_2^h(p,\bar{u})$$

introducimos el consumo óptimo en la función objetivo.

Identidad de Roy y Lema de Shepard

1. Identidad de Roy

$$x_i^m(p,m) = -\frac{\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p,m)}{\partial m}}$$

→ usando derivadas de la f. de utilidad indirecta podemos recuperar las demandas marsh.

2. Lema de Shepard

$$x_i^h(p,\bar{u}) = \frac{\partial e(p,\bar{u})}{\partial p_i}$$

→ usando la derivada de la f. de gasto podemos recuperar las demandas hicks.

⊛ la demostración se basa en el Teorema del Envolvente y se encuentra en Canvas.

Ejemplo con f. Cobb Douglas:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$$

MAX Utilidad

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad (1)$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \quad (2)$$

Despejo de (1):

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1 \quad (3)$$

Reemplazo (3) en (2):

$$p_1 x_1 + \cancel{p_2} \frac{p_1}{\cancel{p_2}} x_1 = m$$

$$\Rightarrow x_1^m = \frac{m}{2p_1}$$

$$\Rightarrow x_2^m = \frac{m}{2p_2}$$

Hallamos la utilidad indirecta

$$v(p, m) = \underbrace{\left(\frac{m}{2p_1}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{2p_2}\right)^{1/2}}_{u(x_1^m, x_2^m)} = \frac{m}{2\sqrt{p_1 p_2}}$$

Min Gasto

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad (1)$$

$$x_1^{1/2} x_2^{1/2} = \bar{u} \quad (2)$$

Despejo de (1):

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1 \quad (3)$$

Reemplazo (3) en (2):

$$x_1^{1/2} \left(\frac{p_1}{p_2} x_1\right)^{1/2} = \bar{u}$$

$$\Rightarrow x_1^h = \bar{u} \sqrt{p_2/p_1}$$

$$\Rightarrow x_2^h = \bar{u} \sqrt{p_1/p_2}$$

Hallamos la función de gasto

$$e(p, \bar{u}) = \underbrace{p_1 \bar{u} \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} + p_2 \bar{u} \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}}_{p_1 x_1^h + p_2 x_2^h} = 2\bar{u}\sqrt{p_1 p_2}$$

Podemos además comprobar las siguiente igualdades

Roy:

- $$x_1^m = -\frac{\partial v / \partial p_1}{\partial v / \partial m} = -\frac{(-m\, 4^{-1}\, p_2^{-1/2}\, p_1^{-3/2})}{2^{-1}\, p_1^{-1/2}\, p_2^{-1/2}} = \frac{m}{2p_1}$$

- $$x_2^m = -\frac{\partial v / \partial p_2}{\partial v / \partial m} = \text{VERIFIQUEN UDS} = \frac{m}{2p_2}$$

Shepard:

- $$x_1^h = \frac{\partial e}{\partial p_1} = 2\bar{u}\, \frac{1}{2}\, p_1^{-1/2}\, p_2^{1/2} = \bar{u}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}.$$

- $$x_2^h = \frac{\partial e}{\partial p_2} = \text{VERIFIQUEN UDS} = \bar{u}\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$$

Quiero, además, que noten lo siguiente:

✓ Si reemplazo $e(p,\bar{u})$ en vez de m en la utilidad indirecta me da:

$$v(p, e(p,\bar{u})) = \frac{e(p,\bar{u})}{2\sqrt{p_1 p_2}} = \frac{2\bar{u}\sqrt{p_1 p_2}}{2\sqrt{p_1 p_2}} = \bar{u}$$

✓ Si reemplazo $v(p,m)$ en vez de $\bar{u}$ en la función de gasto me da:

$$e(p, v(p,m)) = 2\, v(p,m)\sqrt{p_1 p_2} = 2\,\frac{m}{2\sqrt{p_1 p_2}}\sqrt{p_1 p_2} = m$$

✓ Si reemplazo entonces $e(p,\bar{u})$ en vez de m en la demanda marshalliana me da:

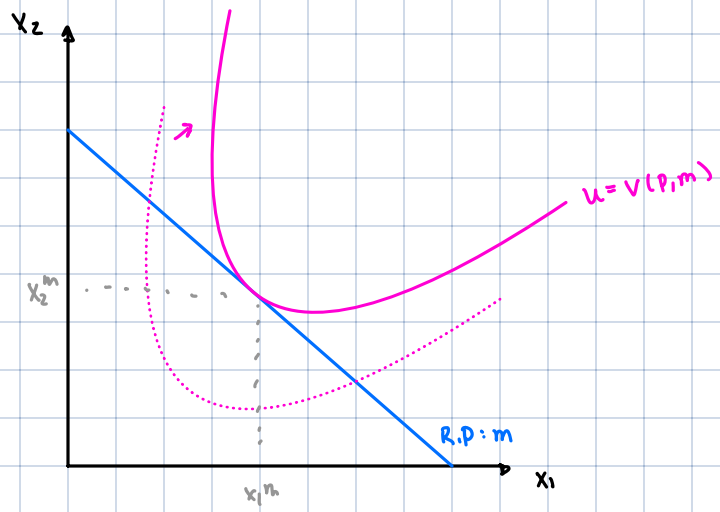
$$x_1^m(p, e(p,\bar{u})) = \frac{e(p,\bar{u})}{2p_1} = \frac{2\bar{u}\sqrt{p_1 p_2}}{2p_1} = \underbrace{\bar{u}\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}}_{x_1^h(p,\bar{u})}$$

✓ Si reemplazo entonces $v(p,m)$ en vez de $\bar{u}$ en la demanda hicksiana me da:

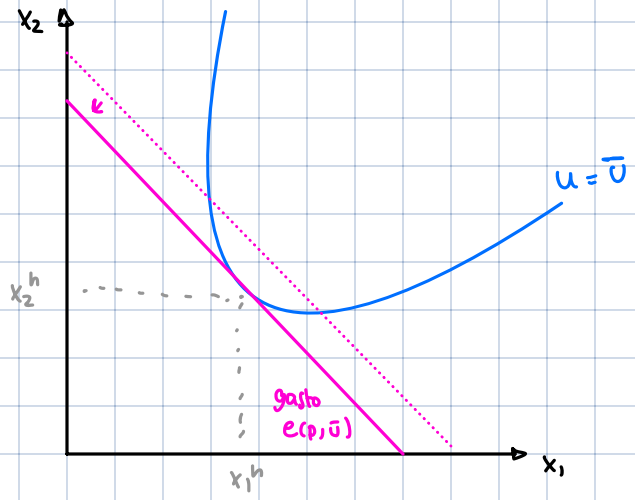
$$x_1^h(p, v(p,m)) = v(p,m)\sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = \frac{m}{2\sqrt{p_1 p_2}}\,\frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}} = \underbrace{\frac{m}{2p_1}}_{x_1^m(p,m)}$$

Esto NO es una coincidencia y se conoce como la DUALIDAD de los problemas de maximización de utilidad y de minimización de gastos.

MAX UTI



MIN GASTOS



Fíjense que si $m = e(p,\bar{u})$ o, equivalentemente, $v(p,m) = \bar{u}$ AMBOS PROBLEMAS DAN EL MISMO OPTIMO : $x_1^m = x_1^h$
$x_2^m = x_2^h$

Las cuatro identidades más importantes del capítulo:

1) $x_1^m(p, m) = x_1^h(p, v(p,m))$

2) $x_1^h(p, \bar{u}) = x_1^m(p, e(p,\bar{u}))$

3) $v(p, e(p,\bar{u})) = \bar{u}$

4) $e(p, v(p,m)) = m$