Def.- (Función de utilidad) Se denomina función de utilidad $u(\cdot): X \to \mathbb{R}$ a una función que asigna cada canasta de bienes $x \in X$ a un número real, que representa el ranking de sus preferencias.
Además, cumple que:

$$x \sim y \iff u(x) = u(y)$$
$$x \succ y \iff u(x) > u(y)$$

Por ejemplo: $\underbrace{X = \mathbb{R}^2}_{\text{2 bienes}}$ y $u(x_1, x_2) = x_1^{0.5} x_2^{0.5}$. Tenemos que

$$u(16, 9) = 16^{0.5} \times 9^{0.5} = 12 < u(15, 10) = 15^{0.5} \times 10^{0.5} = 12.248$$

Podemos decir que esta persona con utilidad $x_1^{0.5} x_2^{0.5}$ prefiere la canasta (15,10) a la canasta (16,9).

Importante: ¿Qué implica la definición?

- La $u(x)$ sirve para hacer un ranking. Es decir, tiene carácter ordinal. El número en particular no dice nada, solo sirve si lo comparas entre diferentes opciones.

$u(x) = 1000\ 000$
$u(y) = 0.3$ $\Rightarrow x \succ y$

$v(x) = 3.1$
$v(y) = 3$ $\Rightarrow x \succ y$

Ambas $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ pueden representar las mismas preferencias

- Dicho lo anterior, vemos que la f. de utilidad no es una representación única.

Ejemplo:

	$u^0(\cdot)$	$u^1(\cdot)$	$u^2(\cdot)$
w	3	2000	-2
x	1.5	4	-10
y	1.5	4	-10
z	1	3	-11

Estas tres funciones establecen un mismo ranking (preferencias)

Def.- (Transformación Monotonamente creciente) Una transformación monot. crec. es una función $T : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ que transforma un número real a otro número real de manera que:

$$T(a) > T(b) \iff a > b \quad , \quad \text{donde} \quad a, b \in \mathbb{R} .$$

Es decir, $\dfrac{\partial T(a)}{\partial a} > 0$

La importancia del concepto previo es que aplicar una transformación monot. crec. a la función de utilidad NO AFECTA el ranking establecido.

Ejemplo:

$$\underbrace{u(x_1, x_2)}_{\text{solemos poner solo } x \text{ porque es un vector}} = x_1^{1/2} x_2 \qquad w = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$u(w) = \sqrt{2}$ (o sea $x > w$)

$u(x) = 2$

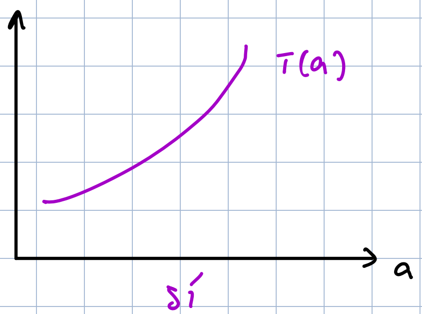
y tomemos la función monot. creciente $T(a) = \ln a$

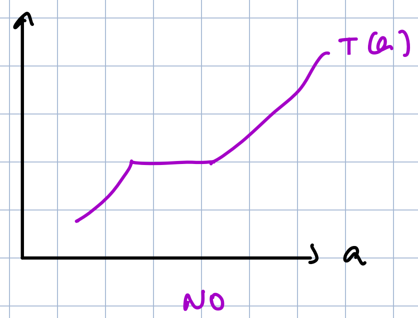
$$\left.\begin{array}{l} T(u(w)) = \ln(\sqrt{2}) \\ T(\underbrace{u(x)}_{\text{recuerden que esto es un número real.}}) = \ln(2) \end{array}\right\} \text{se mantiene el ranking}$$

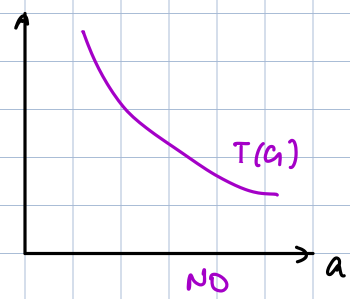
Veamos más ejemplos:

$T(a)$	$\partial T / \partial a$	Transf. monot. crec.
$a + 5$	1	sí
$3a$	3	sí
a^3	$3a^2$	si $a \neq 0$ sí
a^2	$2a$	si $a > 0$ sí
$\ln a$	$1/a$	si $a > 0$ sí

Es decir, si dibujamos $T(\cdot)$ debería verse como una función que siempre crece y no se "estanca".

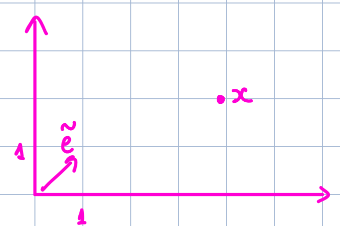


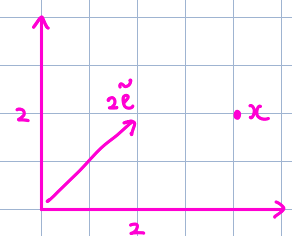




<u>Teorema</u>.- (Existencia de f. de utilidad, Debreu 1959)
Si las preferencias son completas + transitivas + continuas, entonces existe una función de utilidad $u(\cdot)$ continua que representa estas preferencias.

<u>Sketch (intuitivo) de la prueba</u>:
Por simplicidad tomaremos el caso de 2 bienes: $\mathcal{X} = [0,\infty) \times [0,\infty)$
Si queremos determinar la "utilidad" de una canasta cualquiera $x \in \mathcal{X}$ la compararemos con un vector cualquiera (C). Por simplicidad elegiremos $\tilde{e} = (1,1)$. Nuestro objetivo es saber que número $t>0$ debemos multiplicar a $\tilde{e}$ para que sea indiferente a x.





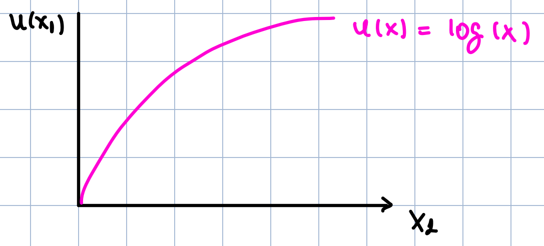
Si vamos subiendo $t \uparrow$ hasta que llegará un punto donde $t\tilde{e} \sim x$ (M, CONT)
entonces podemos definir $u(x) = t$. Además, ya que las preferencias son transitivas se debe cumplir que si $x \succsim y$

$$t_0 \tilde{e} \sim x$$

$$t_1 \tilde{e} \sim y$$

$\Rightarrow$ debe ser que $t_0 \geq t_1$. Por lo que también habrá transitividad. ■

¿Cómo se gráfica el caso de 1 bien ($n=1$)?

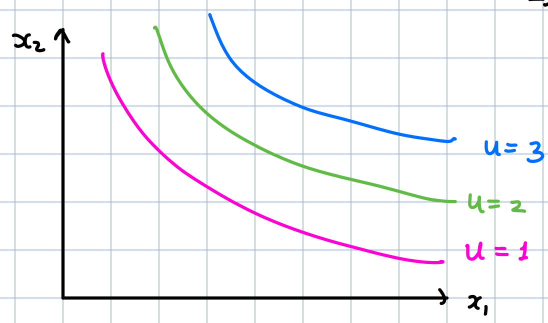


¿Transitivo? sí
¿Monótono? sí
¿Continuo? sí

¿Cómo se gráfica el caso de 2 bienes ($n=2$)?

Para obtener la curva de indif. se iguala la f. de utilidad a una constante. Ejemplo: $u(x) = x_1 x_2 \Rightarrow x_1 x_2 = K$

$\Rightarrow x_2 = \frac{K}{x_1}$



Así se verían las curvas para $k=1$, $k=2$, $k=3$

(*) Las curvas de indiferencia se gráfican igual que las curvas de nivel en optimización estática.

<u>Def</u>.- (Utilidad Marginal) Es el cambio en utilidad al aumentar uno de los bienes en cierta cantidad (típicamente 1 unidad)

$$Umg_1 = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

(*) Si es discreto $Umg_1 = \frac{\Delta u(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$

$$Umg_2 = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

Habitualmente suponemos que se cumple

1) $Umg_1 > 0$ (corresponde a $\succsim$ monótonas)

2) $\frac{\partial Umg_1}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} < 0$

a medida que tengo más, cada unidad adicional genera menos Umg.

Def.- (Tasa Marginal de Sustitución - TMS) indica desde un punto $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ cuanto de x_2 habría que sacrificar a costa de tener 1 unidad extra de x_1, de manera que la utilidad se mantenga constante. Es decir, es la pendiente de la curva de indiferencia.

Tomamos diferencial total

$$d\,u(x) = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot dx_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{du}_{=0} = Umg_1 \, dx_1 + Umg_2 \, dx_2$$

utilidad constante

$$\Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{Umg_1}{Umg_2}$$

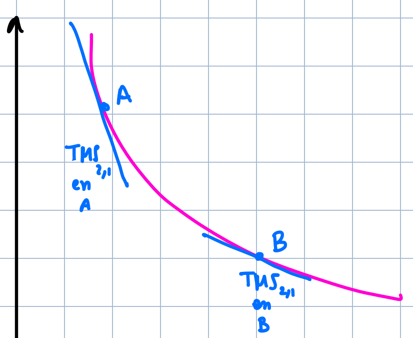
$\to$ cambian según la canasta x (no es constante)

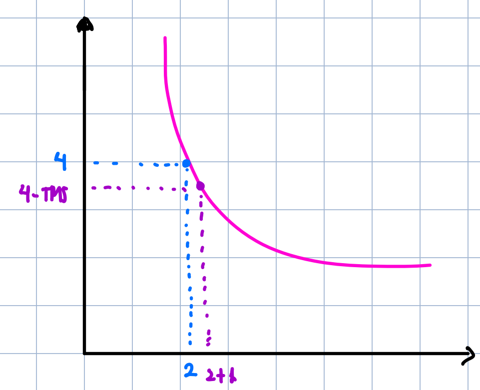
$\Downarrow$

¡ pendiente de la curva de indiferencia !

$$TMS_{2,1} = - \frac{Umg_1}{Umg_2}$$

Gráficamente :





Si quiero una unidad más de x_1 debo reducir x_2 en TMS para seguir en la curva de indiferencia.

¿ Cómo afecta una transf. monotonamente creciente a Umg y TMS ?

	$u(x_1, x_2)$	$T(u(x_1,x_2))$	Comentario
Umg_1	$\partial u / \partial x_1$	$\frac{\partial T}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1}$	Diferentes pero mismo signo.
Umg_2	$\partial u / \partial x_2$	$\frac{\partial T}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2}$	
TMS	$- \frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2}$	$- \frac{\cancel{\partial T / \partial u} \cdot \partial u / \partial x_1}{\cancel{\partial T / \partial u} \cdot \partial u / \partial x_2}$	Igual

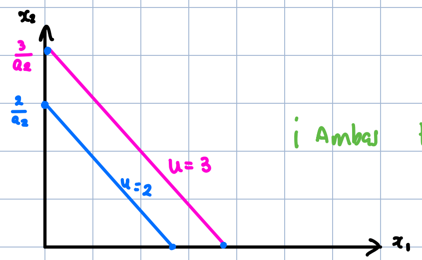
Preferencias : Casos Particulares

1) Sustitutos perfectos : $U = a_1 x_1 + a_2 x_2$

curva de indiferencia para $U = K$

$\Rightarrow a_1 x_1 + a_2 x_2 = K$

$\Rightarrow x_2 = \frac{K}{a_2} - \frac{a_1}{a_2} x_1$ → es una función lineal

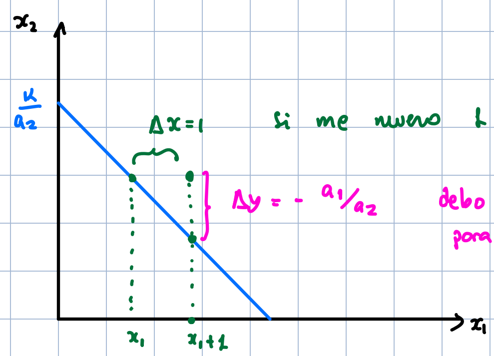


¡ Ambas tienen pendiente $-\frac{a_1}{a_2}$!

La tasa marginal de sustitución es igual a

$$TMS_{2,1} = -\frac{Umg_1}{Umg_2} = -\frac{a_1}{a_2}$$ ⇒ una constante (es una propiedad de las f. lineales)

Significa que si me dan una unidad más del bien x_1, deben quitarme (porque es un número negativo) a_1/a_2 del bien x_2 para mantenerme igual de satisfecho que como me encontraba originalmente.



Si me muevo 1 unidad a la derecha ...

debo moverme a_1/a_2 hacia abajo para regresar a la curva de indiferencia original.

Ejemplo : $U = x_1 + 2 x_2$

x_1: Pepsi, x_2: coca Cola

$Umg_1 = 1$ $Umg_2 = 2$ ⇒ Una coca cola extra me da el doble de "utilidad" que una Pepsi extra.

$TMS_{2,1} = -1/2$

Si me dan una Pepsi más, me deben quitar $1/2$ Coca Cola para dejarme igual de feliz que estaba.

2) <u>Complementos perfectos</u>: $u = \underbrace{\min\{a_1 x_1, a_2 x_2\}}$

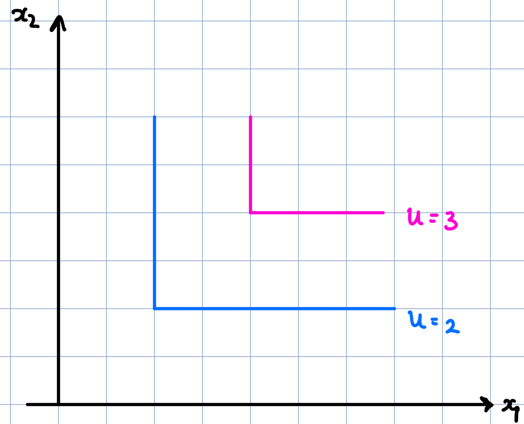
El individuo consume bienes juntos y en proporciones fijas.

Ejemplo: $x_1 :=$ pan, $x_2 :=$ hot dog, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$

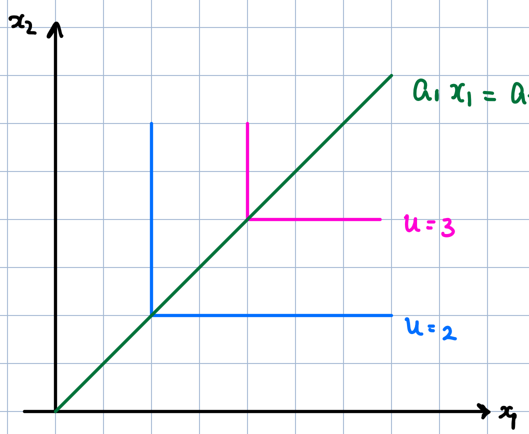
$\min\{2, 0\} = 0$ → 2 panes y 0 hotdogs me da 0 utilidad

$\min\{0, 2\} = 0$ → 0 panes y 2 hotdogs me da 0 utilidad

$\min\{2, 1\} = 1$ → 2 panes y 1 hotdog me permite hacer al menos 1 sandwich y tener 1 utilidad.

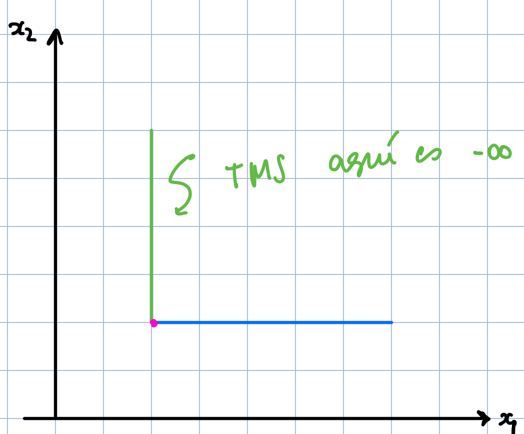


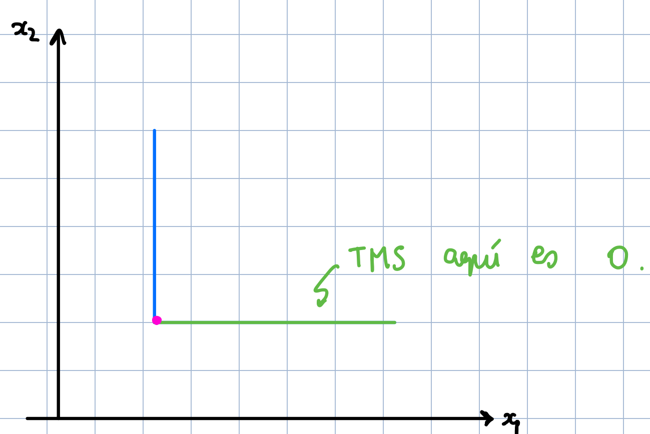
Así se ven sus curvas de indiferencia.



$a_1 x_1 = a_2 x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{a_1}{a_2} x_1$

Esta ecuación muestra la recta que pasa por todas las "esquinas" de la curva de indiferencia.





En la esquina • la TMS no está definida. Es decir, en ese punto, la curva de indiferencia no es diferenciable.

3) Cobb - Douglas: $u = x_1^{a_1} \; x_2^{a_2}$, donde $a_1, a_2 > 0$

(a veces definimos $a_1 + a_2 = 1$)
Es decir, hacemos que sumen 1.

tiene curvatura (la pendiente es negativa pero va cambiando). No es rígida como los casos anteriores. Permite cierto grado de sustitución y complementariedad de bienes.

La tasa marginal de sustitución es igual a

$$TMS_{2,1} = -\frac{Umg_1}{Umg_2} = -\frac{a_1 \, x_1^{a_1-1} \, x_2^{a_2}}{a_2 \, x_1^{a_1} \, x_2^{a_2-1}} = -\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{x_2}{x_1}$$

⇒ NO es constante. Depende de qué coordenadas de (x_1, x_2) tenemos.

La pendiente en (x_1, x_2) es más negativa que la pendiente en $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ que es menos negativa.

⊛ Paréntesis. Debemos introducir una definición importante ahora.

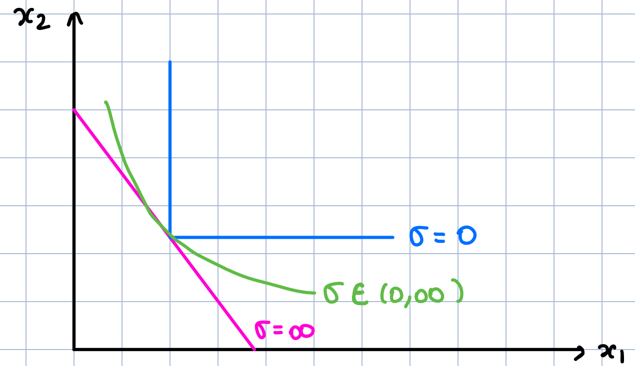
Def.- (Elasticidad de sustitución σ) Nos dice cuanto cambia x_2/x_1 (ratio entre bienes) cuando aumenta $TMS_{2,1}$ en 1%.

⊛ Intuitivamente: si TMS es más negativa, el bien 2 es más valioso relativo al bien 1, lo que significa que x_2 es escaso relativo a x_2 (x_2/x_1 alto)

$$\sigma = \frac{\Delta\% \; x_2/x_1}{\Delta\% \; |TMS_{2,1}|} = \frac{\partial \ln(x_2/x_1)}{\partial \ln(|TMS_{2,1}|)}$$

$\sigma = 0$ si Umg_1 aumenta en comparación a Umg_2, mi composición de bienes no cambia.

$\sigma = \infty$ si Umg_1 aumenta en comp a Umg_2, muevo todo mi consumo a x_1.



Es decir, la elasticidad de sustitución nos da cierta medida de la curvatura de las curvas de indiferencia.

Para las curvas de utilidad Cobb-Douglas podemos calcular la elasticidad de sustitución de la siguiente forma:

$$TMS_{2,1} = -\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{x_2}{x_1}$$

sacamos valor abs

$$\Rightarrow \quad |TMS_{2,1}| = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{x_2}{x_1}$$

sacamos log

$$\Rightarrow \quad \log(|TMS_{2,1}|) = \log\frac{a_1}{a_2} + \log(x_2/x_1)$$

cambiamos orden $\Rightarrow$ ecuación

$$\log(x_2/x_1) = \log(|TMS|) - \log\frac{a_1}{a_2}$$

tomamos derivada

$$\Rightarrow \quad \sigma := \frac{\partial \log(x_2/x_1)}{\partial \log(|TMS|)} = 1.$$

Todas las funciones en que la elasticidad de sustitución es una constante pertenecen a una familia de funciones de utilidad.

4) Constant Elasticity of Substitution (CES): $u = (a_1 x_1^\rho + a_2 x_2^\rho)^{1/\rho}$

$$Umg_1 = 1/\cancel{\rho}\,[a_1 x_1^\rho + a_2 x_2^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}}\, a_1 \cancel{\rho}\, x_1^{\rho-1}$$

$$Umg_2 = 1/\cancel{\rho}\,[a_1 x_1^\rho + a_2 x_2^\rho]^{\frac{1-\rho}{\rho}}\, a_2 \cancel{\rho}\, x_2^{\rho-1}$$

Por lo tanto, la TMS es dada por:

$$TMS_{2,1} = -\frac{a_1}{a_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1} = -\frac{a_1}{a_2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho}$$

Podemos obtener la elasticidad de sustitución también:

$$TMS_{2,1} = -\frac{a_1}{a_2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho}$$

valor abs y
$\Rightarrow$ logaritmos

$$\log |TMS_{2,1}| = \log \frac{a_1}{a_2} + (1-\rho) \log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

reordenamos
$\Rightarrow$

$$\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{1}{1-\rho}\log(|TMS|) - \frac{1}{1-\rho}\log\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$$

tomamos
$\Rightarrow$ derivada

$$\sigma := \frac{\partial \log(x_2/x_1)}{\partial \log(|TMS|)} = \frac{1}{1-\rho}$$

¡distintos valores de ρ dan distintas constantes!

Hay 3 casos importantes:

$\rho \to 1 \Rightarrow \sigma = \infty$ sustitutos perfectos

$\rho \to 0 \Rightarrow \sigma = 1$ Cobb - Douglas

$\rho \to -\infty \Rightarrow \sigma = 0$ Complementos perfectos

El parámetro $\rho \in (-\infty, 1]$ mide el grado de sustitución entre los bienes. La familia de utilidad CES nos permite ser flexibles al modelar ese grado de sustitución.

Todas las preferencias anteriores tienen una propiedad en común llamada homoteticidad. Por ello, se les dice preferencias homotéticas.

Def.- (Preferencias homotéticas) Son preferencias que se representan por funciones de utilidad que son homogeneas de grado 1.
Es decir,

$$u(\underbrace{k \cdot x_1, k \cdot x_2}_{\text{utilidad de multiplicar por una misma constante}}) = \underbrace{k^1 u(x_1, x_2)}_{\text{multiplicar la utilidad por esa constante.}}$$

utilidad de multiplicar por una misma constante = multiplicar la utilidad por esa constante.

Las preferencias homotéticas implican lo siguiente:

$$\frac{\partial u(kx)}{\partial (kx_1)} k\, dx_1 + \frac{\partial u(kx)}{\partial (kx_2)} k\, dx_2 = k\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \cdot dx_2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \underbrace{-\frac{\partial u(kx)/\partial(kx_1)}{\partial u(kx)/\partial(kx_2)} = -\frac{\partial u(x)/\partial x_1}{\partial u(x)/\partial x_2}}_{\text{La TMS de } u(kx_1, kx_2) \text{ es la misma que } u(x_1, x_2).}$$

Es decir, la TMS es una función homogénea de grado 0. Fíjense en lo que significa eso:

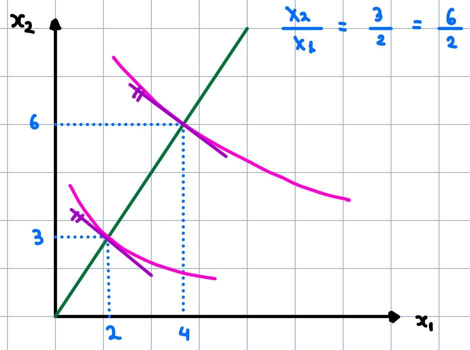
$$TMS(k \cdot x_1, k \cdot x_2) = k^0 \cdot TMS(x_1, x_2)$$

$\Rightarrow$ Elige $k = 1/x_2$.

$$\underbrace{TMS(x_1/x_2, 1)}_{\text{una función del ratio}} = TMS(x_1, x_2)$$

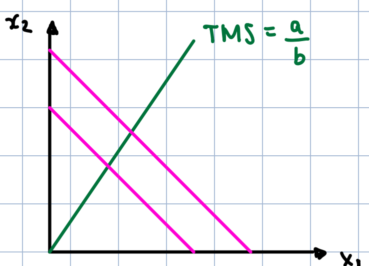
$$\Rightarrow \quad TMS(x_1, x_2) = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

La TMS es una función del ratio de bienes. Ojo que da lo mismo x_1/x_2 o x_2/x_1, lo que importa es la proporción de ambos.

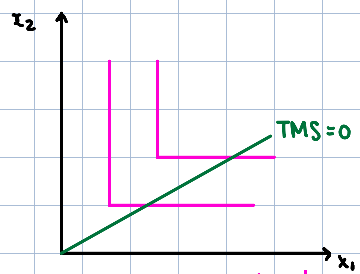


Si tomamos dos canastas con una misma proporción, la pendiente (TMS) debe ser igual.

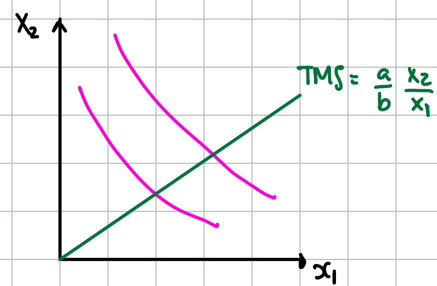
Ejemplos: sustitutos perfectos, complementarios perfectos, Cobb Douglas.



misma pendiente por definición.



misma pendiente.



5) Preferencias Cuasilineales :

- $U = v(x_1) + a_2 \cdot x_2$ (Cuasi lineal en x_2)

$$Umg_1 = v'(x_1)$$
$$Umg_2 = a_2$$
$$\Rightarrow TMS_{2,1} = -\frac{v'(x_1)}{a_2}$$ solo depende de x_1.

A un mismo x_1 la TMS es la misma.

- $U = a_1 . x_1 + v(x_2)$ (Cuasi lineal en x_1)

$$Umg_1 = a_1$$
$$Umg_2 = v'(x_2)$$
$$\Rightarrow TMS_{2,1} = -\frac{a_1}{v'(x_2)}$$ solo depende de x_2.

A un mismo x_2 la TMS es la misma.

$$\frac{X_2}{X_1}$$

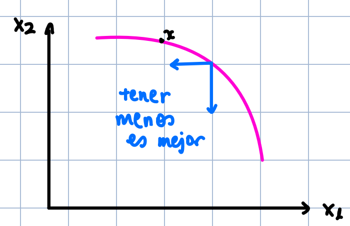
* Preferencias que **NO** cumplen con monotonicidad

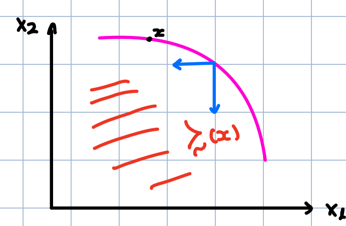
1) Males o Desbienes

Casos en que el consumo de algún x_j causa desagrado. Se cumple que:

$$Umg_j < 0$$ (tener más de j me da MENOR utilidad)

Ejemplo: x_2 := distancia a mi trabajo
x_1 := contaminación





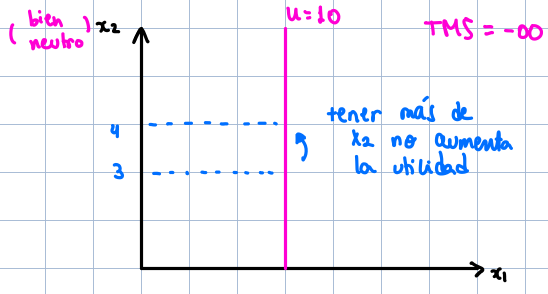
Es decir, las preferencias no son monótonas.

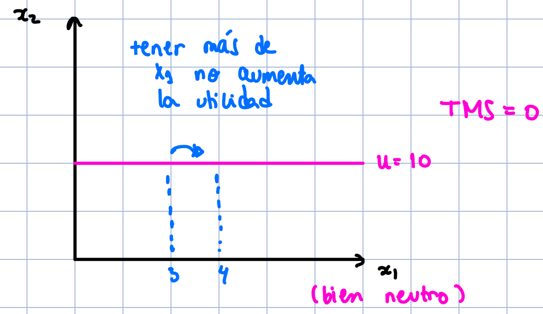
2) Bienes Neutrales

Casos en que el consumo de algún x_j causa desagrado. Se cumple que:

$$Umg_j = 0$$ (tener más de j me da IGUAL utilidad)

Ejemplo: x_j := música en la pollería (me da igual)





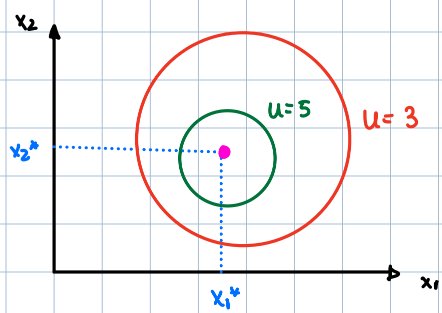
Podemos ver un caso de utilidad $u(x) = \sqrt{x_1}$ (x2 bien neutro)

$$Umg_1 = 1/2 \; x_1^{-1/2}$$
$$Umg_2 = 0$$

Es decir, las preferencias no son monótonas.

3) Puntos de Saciedad (Bliss Point)

Casos donde hay un punto (x_1^*, x_2^*) que es absolutamente preferido que todo lo demás. A medida que nos acercamos somos más felices.



- Bliss point ⇒ máxima utilidad

Nuevamente, no son monótonas.